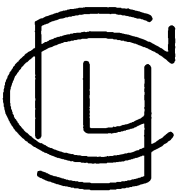


Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0660.02.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Юнита 2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

МОСКВА 2001

Разработано Р.Я. Глаголевой, канд. физ.-мат. наук, доцентом,
Л.Е. Россовским, канд. физ.-мат. наук

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Юнита 1. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Юнита 2. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Юнита 3. Дифференциальные уравнения.

Юнита 4. Ряды. Ряды Фурье.

ЮНИТА 2

В юните рассмотрены вопросы интегрирования функций одной и нескольких переменных. Определяется первообразная функции, вводится понятие определенного интеграла от функции, заданной на отрезке. Это понятие далее обобщается на функции нескольких переменных, заданные в плоской или пространственной области (кратные интегралы), а также на функции, заданные на кривых и поверхностях (криволинейные и поверхностные интегралы). Кроме того, приводятся геометрические, механические и физические приложения интегралов.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета
Юнита соответствует профессиональной образовательной программе №1

ISBN 5-8323-0290-7

0660.002.02.00.01;1/11.13.Тир.14000

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 5
ЛИТЕРАТУРА 6
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 7
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 11
1. Неопределенный интеграл 11
1.1. Определение неопределенного интеграла, его свойства; таблица интегралов от основных элементарных функций . . 11
1.1.1. Понятие неопределенного интеграла 11
1.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла 12
1.1.3. Таблица основных интегралов 13
1.2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле 15
1.2.1. Замена переменной 15
1.2.2. Интегрирование по частям 17
1.3. Интегрирование рациональных функций 18
1.4. Методы интегрирования некоторых тригонометрических и иррациональных выражений 25
2. Определенный интеграл 31
2.1. Определение определенного интеграла, условия его существования. Свойства определенного интеграла 31
2.1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла . 31
2.1.2. Определение определенного интеграла Римана 33
2.1.3. Геометрический смысл верхних и нижних интегральных сумм и определенного интеграла от неотрицательной функции . . 35
2.1.4. Основные свойства определенного интеграла 36
2.2. Интеграл с переменным верхним пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница 40
2.2.1. Интеграл с переменным верхним пределом 40
2.2.2. Формула Ньютона-Лейбница 42
2.3. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле 43
2.3.1. Замена переменной в определенном интеграле 43
2.3.2. Интегрирование по частям в определенном интеграле 44
2.4. Несобственные интегралы 45
2.4.1. Несобственные интегралы от непрерывных функций на бесконечном промежутке 46
2.4.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций на конечном промежутке 48
3. Геометрические и механические приложения определенного интеграла 51
3.1. Площадь плоской фигуры 51
3.1.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах 51
3.1.2. Площадь плоской фигуры в полярных координатах 54

3.1.3. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания граничной кривой 56
3.2. Объем тела вращения 57
3.2.1. Формула для вычисления объема тела через площади его параллельных сечений 57
3.2.2. Формула для вычисления объема тела вращения 58
3.3. Длина дуги кривой 59
3.3.1. Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах 59
3.3.2. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями 61
3.3.3. Длина дуги кривой в полярных координатах 63
3.3.4. Дифференциал переменной длины дуги 64
3.4. Площадь поверхности вращения 66
4. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы 69
4.1. Определение кратного интеграла, условия существования и свойства кратного интеграла 69
4.2. Сведение кратного интеграла к повторному 73
4.3. Замена переменных в кратном интеграле 78
4.4. Площадь поверхности 83
4.5. Определение криволинейного интеграла, его свойства 85
4.6. Формула Грина 89
4.7. Определение поверхностного интеграла, его свойства 90
4.8. Формула Стокса 93
4.9. Формула Остроградского–Гаусса 96
4.10. Соленоидальные и потенциальные векторные поля 97
4.11. Геометрические и физические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов 102
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 105
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 119
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям, интегрирование рациональных функций и рационализирующие подстановки для некоторых классов интегралов от тригонометрических и иррациональных выражений.

Определенный интеграл, как предел интегральных сумм, его свойства и связь с неопределенным интегралом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Несобственные интегралы.

Геометрические и механические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения, длина дуги, площадь поверхности вращения, масса и центр тяжести неоднородного стержня.

Двойные и тройные интегралы, их определение, свойства и вычисление сведением к повторному. Замена переменных в кратных интегралах. Площадь поверхности. Механические приложения кратных интегралов: масса и центр тяжести неоднородного тела.

Криволинейный интеграл от вектор-функции, его определение, свойства и вычисление. Работа векторного поля. Формула Грина.

Поверхностный интеграл от вектор-функции, его определение, свойства, вычисление. Поток векторного поля.

Дифференциальные операции над скалярными и векторными полями: градиент скалярного поля, дивергенция и вихрь векторного поля. Формула Стокса. Формула Остроградского-Гаусса. Соленоидальные и векторные поля.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1,2. М., Наука, 1985.

2. Сборник задач по математике для ВТУЗов под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Т.1,2. М., Наука. 1981.

Дополнительная

3. Хавинсон С.Я. Лекции по интегральному исчислению. М., Высшая школа. 1976.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука. 1980.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., Наука. 1981.

6. Данко П.Е., Попова А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М., Высшая школа, 1986.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритм
1	Найти интеграл $\int f(x)dx$ методом замены переменной	1. Подобрать замену переменной $x=\varphi(t)$ или $t=\varphi^{-1}(x)$. 2. Выразить подынтегральную функцию через новую переменную: $f[\varphi(t)]$. 3. Выразить dx через t и dt, используя равенства $dx=\varphi'(t)dt$ или $dt=[\varphi^{-1}(x)]'dx$. 4. Записать данный интеграл по формуле замены переменной $\int f(x)dx\Big\|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. 5. Применить к полученному интегралу основные свойства неопределенного интеграла и воспользоваться таблицей основных интегралов. 6. Вернуться от переменной t к исходной переменной x, подставив $t=\varphi^{-1}(x)$.
2	Найти интеграл $\int f(x)dx$ методом интегрирования по частям	1. Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$. 2. Найти $du=u'(x)dx$ и $v=\int dv(x)$. 3. Применить формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$. 4. Найти интеграл $\int vdu$. 5. Подставить результат в найденное в алгоритме (3) выражение.

№ п/п	Умение	Алгоритм
3	Вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница	1. Найти одну из первообразных $F(x)$ функции $f(x)$. 2. Вычислить значение первообразной $F(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$. 3. Вычислить значение определенного интеграла по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$
4	Вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом замены переменной	1.Выбрать замену переменной $x=\varphi(t)$ ($x=\varphi(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция). 2. Перейти в подынтегральном выражении от переменной x к новой переменной t: $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 3. Найти пределы интегрирования по новой переменной t из равенств $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$. 4. Записать данный интеграл по формуле замены переменной $\int_a^b f(x)dx\Big\|_{x=\varphi(t)} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$ 5. Вычислить определенный интеграл в правой части последнего равенства по формуле Ньютона-Лейбница.
5	Применение определенного интеграла к вычислению: а) площадей плоских фигур;	а) *Вычисление площадей плоских фигур:* 1. Построить данные кривые и ограниченную ими область. 2. Определить, является ли данная область правильной относительно оси Oy –

№ п/п	Умение	Алгоритм
	б) объемов тел вращения	$D_I = \{(x,y): a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$, или правильной относительно оси Ox – $D_{II} = \{(x,y): c \le y \le d, \psi(y) \le x \le \varphi(y)\}$, и если такой не является, то разбить ее на конечное число областей указанного вида. 3. Вычислить площадь каждой из областей типа D_I по формуле $S_I = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, а площадь каждой из областей типа D_{II} по формуле $S_{II} = \int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)]dy$. 4. Сложить полученные значения площадей всех областей. б) *Вычисление объемов тел вращения:* 1. Построить кривые и область, ими ограниченную. 2. Если данная область – криволинейная трапеция $D = \{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, то объем тела, образованного вращением области D вокруг оси Ox, вычислить по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. В случае, когда данная область – область типа $D_I \{(x,y): a \le x \le b; 0 \le g(x) \le y \le f(x)\}$, объем тела, образованного вращением об-

№ п/п	Умение	Алгоритм
		ласти D_1 вокруг оси Ox, вычислить по формуле $$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx.$$
6	Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	1. Нарисовать область интегрирования. 2. Представить двойной интеграл в виде повторного, определив порядок интегрирования и расставив пределы интегрирования. 3. Вычислить повторный интеграл.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение неопределенного интеграла, его свойства; таблица интегралов от основных элементарных функций

В этой главе будет рассматриваться задача, обратная задаче нахождения производной функции, а именно, задача восстановления функции по ее производной.

1.1.1. Понятие неопределенного интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной функции** $f(x)$ на интервале (a,b), если она дифференцируема на этом интервале и в каждой его точке $F'(x)=f(x)$.

Например, первообразными функции $3x^2$ являются функции x^3 и x^3+5, так как $\left(x^3\right)'=3x^2$ и $\left(x^3+5\right)'=3x^2$.

Заметим, что вообще, если $F(x)$ первообразная $f(x)$, то $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной $f(x)$, так как $\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$. Таким образом, по производной функция восстанавливается не однозначно.

Убедимся, что всякая первообразная функции $f(x)$ содержится в множестве функций $F(x)+C$ при некотором значении C. Действительно, пусть $\Phi(x)$ – какая-нибудь отличная от $F(x)$ первообразная функции $f(x)$. Положим $\phi(x)=\Phi(x)-F(x)$. Тогда

$$\phi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Согласно известному из дифференциального исчисления условию постоянства функции отсюда получаем, что $\phi(x)=C_1$ или

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

$\Phi(x) - F(x) = C_1$, где C_1 – константа, равная, например, $\phi(a)$. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C_1$ и $\Phi(x)$ принадлежит совокупности первообразных $F(x) + C$ при $C = C_1$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом от функции** $f(x)$. Он обозначается символом $\int f(x)dx$. При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, знак $\int$ – знаком интеграла.

Из определения и изложенного выше следует, что если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1.1)$$

где C – произвольная постоянная. Нахождение неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Отметим, что всякая непрерывная функция имеет в области непрерывности первообразную.

1.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Так как операция интегрирования есть операция, обратная дифференцированию, то справедливы равенства:

$$[\int f(x)dx]' = f(x);\ d\int f(x)dx = f(x)dx;$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C;\ \int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливость следующих равенств легко установить дифференцированием их левых и правых частей.

2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

где k – постоянный множитель, отличный от нуля.

Всякая формула дифференцирования, прочитанная справа налево, порождает формулу интегрирования.

1.1.3. Таблица основных интегралов

Каждое из приведенных ниже равенств рассматривается в области, где подынтегральная функция и ее первообразная непрерывны. В правых частях этих равенств C – произвольная постоянная.

Из таблиц производных следуют формулы:

I. $\int 0dx = C$

II. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$

III. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

IV. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a, a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C$

V. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

VI. $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \cos \alpha x\, dx = +\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + C$

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

X. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C = -\mathrm{arcctg}x + C$

Следующие две формулы нетрудно проверить дифференцированием.

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

XII. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ a \neq 0$

Рассмотренные свойства и таблица интегралов позволяют уже находить интегралы от простейших функций.

Пример. Найти $\int (2x^3+5)dx$.

Воспользуемся свойствами 2 и 3 и табличным интегралом (II). Получим

$$\int (2x^3+5)dx = 2\int x^3 dx + 5\int dx = 2\frac{x^4}{4} + 5x + C.$$

Заметим, что результат дифференцирования элементарных функций является снова элементарной функцией, тогда как операция интегрирования элементарных функций может привести к новым функциям, которые не могут быть представлены в виде суперпозиций элементарных функций. Например, доказано, что следующие интегралы существуют, но не выражаются через элементарные функции:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ - интегралы Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус,

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус.

Перейдем к рассмотрению основных методов интегрирования.

1.2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

1.2.1. Замена переменной

Пусть функция $x=\phi(t)$ монотонна и имеет непрерывную производную на некотором промежутке изменения переменной t, функция $f(x)$ непрерывна на интервале, принадлежащем области значений функции $x=\phi(t)$, так что определена сложная функция $f[\phi(t)]$. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)} = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt, \qquad (1.2)$$

называемое **формулой замены переменной** в неопределенном интеграле.

Действительно, дифференцируя левую часть этого равенства по t по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)}\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]\frac{dx}{dt}\Big|_{x=\phi(t)} = f(x)\frac{dx}{dt}\Big|_{x=\phi(t)} = f[\phi(t)]\phi'(t).$$

Отсюда следует, что левая часть равенства (1.2) является неопределенным интегралом по переменной t от функции $f[\phi(t)]\phi'(t)$, то есть совпадает с правой частью этого равенства. Формула (1.2) может быть записана и так:

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

где функция $t=\phi^{-1}(x)$ обратная функции $x=\phi(t)$.

Замена переменной в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ во многих случаях позволяет свести его к более простому или даже табличному интегралу по переменной t, найти его и затем вернуться к переменной x.

Примеры:

а) *Линейная замена переменной.*

Пример 1. Найти $\int \cos(ax+b)dx$ $(a\neq 0)$.

Введем переменную $t = ax + b$. Тогда $t = adx$, откуда $dx = \frac{dt}{a}$.

Используя формулу замены переменной (1.2) и табличный интеграл (VI), получаем

$$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Положим $x = at$. Тогда $dx = adt$. Используя формулу замены переменных (1.2) и табличный интеграл (X), получим

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{adt}{a^2 + (at)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

так что мы можем записать табличный интеграл (X) в более общем виде

$$\text{X.}\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Аналогично получается табличный интеграл

$$\text{IX.}\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

б) *Замена переменной, приводящая к логарифму.*

Если надо проинтегрировать дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, производная знаменателя которой $Q'(x)$ лишь постоянным множителем отличается от числителя $P(x)$, то замена $Q(x) = t$ приведет к табличному интегралу (III).

Пример 3. Найти $\int \operatorname{tg} x dx$.

Имеем: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Положим $\cos x = t$. Тогда $-\sin x dx = dt$ и

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

в) *Степенная замена*.

Пример 4. Вычислить $\int xe^{x^2}dx$.

Положим $x^2 = t$. Тогда $2xdx = dt$, откуда $xdx = \frac{dt}{2}$. По формуле замены переменной (1.2), используя табличный интеграл (IV), получим

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

1.2.2. Интегрирование по частям

Пусть $u = F(x)$ и $v = \Phi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на некотором промежутке. Тогда дифференциал их произведения равен $d(uv) = udv + vdu$. Интегрируя это равенство по переменной x, получим: $uv = \int udv + \int vdu$, откуда

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1.3)$$

Это равенство называется **формулой интегрирования по частям**. Она позволяет нахождение одного интеграла свести к нахождению более простого интеграла. Рассмотрим два класса функций $f(x)$, которые целесообразно интегрировать по частям, и укажем, что в этих случаях при представлении подынтегрального выражения $f(x)dx$ в виде произведения udv следует брать в качестве u, а что в качестве dv. Ниже через $P(x)$ обозначен многочлен.

I. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$. Следует полагать $u = P(x), dv = e^{\alpha x}dx$.

$f(x) = P(x)\sin \beta x$. Следует полагать $u = P(x), dv = \sin \beta x dx$.

$f(x) = P(x)\cos \beta x$. Следует полагать $u = P(x), dv = \cos \beta x dx$.

II. $f(x) = P(x)\ln x$. Следует полагать $u = \ln x, dv = P(x)dx$.

$f(x) = P(x)\operatorname{arctg} x$. Следует полагать $u = \operatorname{arctg} x, dv = P(x)dx$.

$f(x) = P(x)\arcsin x$. Следует полагать $u = \arcsin x, dv = P(x)dx$.

Пример 1. Найти $\int xe^{2x}dx$.

Положим $u = x, dv = e^{2x}dx$. Тогда $du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}$ и по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int xe^{2x}dx = \int udv = uv - \int vdu = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int x \ln x dx$.

Положим $u = \ln x, dv = xdx$.

Тогда $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}$ и по формуле интегрирования по частям будем иметь:

$$\int x \ln x dx = \int udv = uv - \int vdu = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

1.3. Интегрирование рациональных функций

1°. Рациональными функциями называются многочлены $P(x)$ и рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, представляющие собой отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Приведем необходимые для дальнейшего сведения из алгебры о рациональных функциях. Доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в [4].

Пусть $Q_n(x)$ - многочлен степени n, где $n \geq 1$. Число a называется **корнем** или **нулем многочлена** $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$.

Теорема Безу. *Многочлен $Q_n(x)$ делится на $x - a$ без остатка тогда и только тогда, когда число a является корнем многочлена $Q_n(x)$.*

Таким образом, $Q_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$. Корень a называется ***k*-кратным**, если $Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x)$, где $Q_{n-k}(a) \neq 0$. При $k = 1$

корень называется простым.

Будем рассматривать многочлены с *действительными коэффициентами*. Квадратный трехчлен x^2+px+q, где p,q - действительные числа, при $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0$ имеет действительные корни x_1,x_2 и, следовательно, разлагается на линейные множители с действительными коэффициентами: $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$, а при $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$ имеет комплексно сопряженные корни $x_1=\alpha+i\beta, x_2=\alpha-i\beta$, где $i=\sqrt{-1}$, и на линейные множители с действительными коэффициентами не разлагается. В курсе алгебры доказывается, что *всякий отличный от константы многочлен с действительными коэффициентами произвольной степени разлагается на линейные или квадратичные множители с действительными коэффициентами.*

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае называется **неправильной**. Всякую неправильную рациональную дробь можно, деля числитель на знаменатель, представить в виде суммы многочлена, называемого **целой частью дроби**, и правильной рациональной дроби.

Например: $\frac{x^3}{x^2+4}=\frac{x^3+4x-4x}{x^2+4}=x-\frac{4x}{x^2+4}$.

Будем теперь рассматривать правильные рациональные дроби с действительными коэффициентами многочленов в числителе и знаменателе. Среди них назовем **простейшими** дроби вида

1. $\frac{A}{(x-a)^n}, n\geq 1,$

2. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, n\geq 1,$

где $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Теорема. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, у которой* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *- многочлены с действительными коэффициентами и разложение знаменателя* $Q(x)$ *на линейные и квадратичные множители имеет вид:*

$$Q(x) = (x-a)^k ... (x-b)^l (x^2 + px + q)^m ... (x^2 + p_1 x + q_1)^s$$

где $k + ... + l + 2m + ... + 2s = n$, n *–степень многочлена* $Q(x)$, $\frac{p^2}{4} - q < 0, ..., \frac{p_1^2}{4} - q_1 < 0$.

Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *представима в виде суммы простейших дробей по правилу:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + ... + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + ...$$

$$... + \frac{C_m x + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + ... + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{E_s x + F_s}{(x^2 + p_1 x + q_1)^s}, \quad (1.4)$$

где $A_1, ..., A_k, ..., E_s, F_s$ *– действительные числа, называемые неопределенными коэффициентами.*

Тождество (1.4) называется разложением дроби на простейшие. Неопределенные коэффициенты находятся однозначно.

Практическое правило нахождения неопределенных коэффициентов:

1. Умножаем равенство (1.4) на общий знаменатель всех дробей. Получим тождественное равенство двух многочленов.

2. Далее возможны два варианта.

Первый вариант основывается на том, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях равны. Поэтому, раскрывая скобки и приводя в правой части подобные члены, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства. Получаем

систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов.

Пример. Разложить дробь $\frac{2x-1}{x^3+x}$ на простейшие.

Разложим знаменатель на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами: $x^3+x=x(x^2+1)$ и запишем разложение данной дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Умножая это равенство на общий знаменатель $x(x^2+1)$, получим

$$2x-1=Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях этого равенства.

При $x^2: A+B=0$.

При $x: C=2$.

При $x^0: A=-1$.

Тогда $B=-A=1$ и

$$\frac{2x-1}{x^3+x}=-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+1}.$$

Второй вариант составления системы относительно неопределенных коэффициентов. Не раскрывая скобок, даем аргументу x столько различных значений, сколько имеется неопределенных коэффициентов, используя в первую очередь корни знаменателя. (Нужно при этом следить за тем, чтобы уравнения в системе были независимыми).

Пример. Разложить дробь $\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)(x+3)}$ на простейшие.

Представим дробь в виде суммы простейших с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Умножая это равенство на общий знаменатель, получим :

$$2x+3=A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2).$$

Будем давать x последовательно значения 1, 2, -3. Получим систему:

$$5=-4A,\ 7=5B,\ -3=20C,$$

откуда $A=-\frac{5}{4}$, $B=\frac{7}{5}$, $C=-\frac{3}{20}$ и

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)(x+3)}=-\frac{5}{4(x-1)}+\frac{7}{5(x-2)}-\frac{3}{20(x+3)}$$

2° Перейдем к методам интегрирования простейших дробей. Для интеграла от дроби 1-го типа имеем

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\begin{cases}A\ln|x-a|+C & \text{при } k=1,\\ \dfrac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C & \text{при } k>1.\end{cases}$$

Рассмотрим интеграл от дроби 2-го типа при $k=1$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,$$

где $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена $(x^2+px+q)'=2x+p$ и преобразуем интеграл в сумму двух интегралов:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\int\frac{A(2x+p)+2B-Ap}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+(B-\frac{1}{2}Ap)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Замена переменной $x^2+px+q=t$ в первом интеграле приводит его к табличному интегралу (III). Второй интеграл после выделения из квадратного трехчлена полного квадрата суммы

$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ и замены переменной $x+\frac{p}{2}=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\,z$ преобразуется в табличный интеграл (X). В итоге получим.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{1}{2}Ap)\frac{1}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\int\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|t|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}z+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Интеграл $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$ и $k>1$, после выделения в числителе производной квадратного трехчлена x^2+px+q представляют, как и выше, в виде суммы двух интегралов, один из которых заменой $x^2+px+q=t$ сводится к табличному интегралу (II), а второй интегрированием по частям сводится к рассмотренным выше интегралам.

Итак, интегралы от простейших рациональных дробей выражаются через элементарные функции. А так как всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших дробей, то интегралы от всякой рациональной функции выражаются через элементарные функции.

Пример. Найти $\int\frac{x^3}{x^3+1}dx$.

Решение. Выделяем целую часть дроби:

$$\frac{x^3}{x^3+1}=1-\frac{1}{x^3+1}.$$

Разлагаем знаменатель дроби на множители с действительными коэффициентами: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Разлагаем дробь $\frac{1}{x^3+1}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Умножая это равенство на общий знаменатель, получаем

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева.

При x^2:.. $A+B=0$.

При x:.. $-A+B+C=0$.

При x^0:.. $A+C=1$.

Отсюда $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$

Тогда

$$\int\frac{x^3}{x^3+1}dx=\int\left[1-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]dx=$$

$$=x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx=$$

$$=x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.4. Методы интегрирования некоторых тригонометрических и иррациональных выражений

В этом параграфе для интегралов от некоторых классов тригонометрических и иррациональных выражений будут даны рационализирующие подстановки, то есть замены переменной, приводящие исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби. Ниже через $R(.,.), r(.,.)$ будем обозначать рациональные функции своих аргументов.

I. $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Интегралы от выражений, рационально зависящих от $\sin x$ и $\cos x$, всегда сводятся к интегралу от рациональной дроби **универсальной подстановкой**,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Действительно:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $\sin x, \cos x$ и dx их выражения через t и dt, получим интеграл от рациональной

дроби:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Однако в частных случаях предпочтительнее использование других подстановок, которые приводят к интегрированию более простых рациональных дробей, чем при использовании универсальной подстановки. А именно:

а) если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, то есть при замене $\sin x$ на $-\sin x$ она лишь меняет знак, то делают подстановку $\cos x = t$;

б) если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, то есть при замене $\cos x$ на $-\cos x$ она лишь меняет знак, то делают подстановку $\sin x = t$;

в) если подынтегральная функция при замене одновременно и $\sin x$ и $\cos x$ на $-\sin x$ и $-\cos x$ не меняется, то делают подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Примеры:

1. Найти $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$

Подынтегральная функция меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$ (имеет место случай б). Используем замену переменной $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ и

$$\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx = \int \frac{1-t^2}{2+t}dt.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{1-t^2}{2+t}\,dt = \int \left[2 - t - \frac{3}{2+t}\right] dt = 2t - \frac{t^2}{2} - 3\ln|2+t| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, будем иметь

$$\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}\,dx = 2\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x - 3\ln|2+\sin x| + C.$$

2. Найти $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$.

Подынтегральная функция при замене $\sin x$ и $\cos x$ на $-\sin x$ и $-\cos x$ не меняется (имеет место случай в). Используем замену переменной $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

и

$$\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

II. $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$, где m, n - целые неотрицательные числа. К этим интегралам применяют так называемый метод понижения степени: с помощью известных формул из тригонометрии

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

исходный интеграл преобразуется в сумму интегралов от произведений степеней $\sin 2x$ и $\cos 2x$ с меньшими показателями.

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int [\frac{1}{2}(1-\cos 2x)]^2 dx = \frac{1}{4}\int [1-2\cos 2x+\cos^2 2x]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int [1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)]dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+C.$$

III. Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx,\ \int \cos \alpha x \cos \beta x dx,\ \int \sin \alpha x \sin \beta x dx$$

сводятся к табличным с помощью формул

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

Пример.

$$\int [\sin x \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 2x-\cos 4x]\sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int [\sin 3x+\sin 7x-\sin x-\sin 9x]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{\cos 7x}{7}+\cos x+\frac{\cos 9x}{9}\right]+C.$$

IV. Рассмотрим рационализирующие подстановки для интегралов от иррациональных выражений вида:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

где $n,\ldots,m$ - целые числа.

Пусть s - наименьшее общее кратное чисел $n,\ldots,m$. Тогда замена

переменной $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$ приведет исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби.

Пример.

Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Положим $x+1=t^6$. Тогда $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$, $dx=6t^5dt$ и

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}]dt=$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln(1+\sqrt[6]{x+1})+C.$$

V. Интегралы вида

а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$, в) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$

тригонометрическими подстановками соответственно а) $x=a\sin t$, б) $x=a\mathrm{tg}t$, в) $x=a\sec t$ сводятся к уже рассмотренным интегралам вида $\int R(\sin t,\cos t)dt$.

Пример.

Найти $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

Положим $x=3\sin t$. Тогда $\sqrt{9-x^2}=3\cos t$, $dx=3\cos tdt$ и исходный интеграл преобразуется в интеграл $\int 81\sin^2 t\cos^2 tdt$ вида II. Интегрируя его, получим

$$\int 81\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{81}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)dt=\frac{81}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно будем иметь

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{81}{4}\left[\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\sin(4\arcsin\frac{x}{3})\right] + C.$$

(Заметим, что в интеграле $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$ использование тригонометрической подстановки нецелесообразно, так как гораздо проще интеграл берется с помощью степенной подстановки $9-x^2=t^2$. Действительно, дифференцируя это равенство, получим $-2xdx=2tdt$ или $xdx=-tdt$. Тогда получим

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx = \int t(-tdt) = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3} + C).$$

К рассмотренным интегралам могут быть преобразованы интегралы $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, если из квадратного трехчлена выделить полный квадрат суммы и сделать линейную замену переменной.

Отметим, что существуют другие методы интегрирования интегралов $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, которые мы здесь не рассматриваем.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение определенного интеграла, условия его существования. Свойства определенного интеграла.

2.1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Начнем с задач, решение которых приводит к необходимости ввести понятие определенного интеграла.

Задача о вычислении массы неоднородного стержня

Пусть неоднородный стержень конечной длины занимает положение отрезка $[a,b]$ оси x и линейная плотность распределения масс вдоль стержня есть непрерывная функция $\rho(x)$. (Под линейной плотностью $\rho(x)$ понимают $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$, где Δx - длина отрезка, содержащего точку x, Δm - масса этого отрезка. Плотность однородного стержня постоянна и его масса равна произведению плотности на длину стержня. В случае неоднородного стержня сначала будем искать приближенное значение его массы. Для этого

1) разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$;

2) при достаточно мелком разбиении можно считать, что на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ плотность почти постоянна и приближенно равна ее значению в некоторой точке ξ_i этого отрезка: $\rho(x)\approx\rho(\xi_i)$ для любых точек $x\in[x_{i-1},x_i]$;

3) масса Δm_i части стержня $[x_{i-1},x_i]$ будет тогда приближенно равна $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, а масса m всего стержня будет приближенно равна $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i ;$$

4) значение массы стержня будет тем точнее, чем мельче будет разбиение, то есть чем меньше будет $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i$, и чем удачнее будут выбраны точки ξ_i на каждой части $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому для получения точного значения массы стержня естественно перейти к пределу при стремлении к 0 $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i$:

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка единичной массы перемещается из точки a в точку b отрезка $[a,b]$ оси x под воздействием силы $\bar{F}$, направленной вдоль оси x и имеющей переменную величину $|\bar{F}| = f(x)$. Требуется найти работу A этой силы. В случае постоянной силы работа равна произведению величины силы на длину пути перемещения. В случае переменной силы найдем сначала приближенное значение работы A. Для этого

1) разобьем отрезок $[a,b]$ произвольно на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$;

2) при достаточно мелком разбиении можно считать, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ величина силы $f(x)$ почти постоянна и приближенно равна ее значению в некоторой точке ξ_i: $f(x) \approx f(\xi_i)$ для любых точек $x \in [x_{i-1}, x_i]$;

3) работа ΔA_i силы на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ тогда будет приближенно равна $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а работа силы по перемещению массы вдоль всего отрезка $[a,b]$ будет приближенно

равна $\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i;$$

4) Значение работы A будет тем точнее, чем мельче будет разбиение, то есть чем меньше будет $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i$, и чем удачнее будут выбраны точки ξ_i на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому для получения точного значения работы переменной силы на всем отрезке $[a,b]$ естественно перейти к пределу при $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$:

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Как видим, алгоритм нахождения искомой величины в этих задачах общий. Можно привести немало других конкретных задач, при решении которых используется тот же алгоритм. Это привело к необходимости ввести новое понятие – понятие определенного интеграла от функции одной переменной.

2.1.2. Определение определенного интеграла Римана

Пусть на отрезке $[a,b]$ оси x определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку ξ_i. Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую **интегральной суммой Римана для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$**. **Определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$** называется число, обозначаемое символом $\int_a^b f(x)dx$ и равное пределу интегральных сумм

при стремлении к нулю максимальной из длин отрезков разбиения :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (2.1)$$

если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и выбора точек $\xi_1,...,\xi_n$, на отрезках $[x_0,x_1],...,[x_{n-1},x_n]$. Число a называется **нижним пределом интегрирования**, число b – **верхним пределом интегрирования**. Функция $f(x)$, для которой существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется **интегрируемой на отрезке** $[a,b]$. Под пределом интегральных сумм в правой части равенства (2.1) понимается число J, удовлетворяющее условию: для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i < \delta$ и любом выборе точек $\xi_1,...,\xi_n$ выполняется неравенство

$$\left| J - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon .$$

Дополнение к определению определенного интеграла.

Выше, вводя определенный интеграл, мы полагали $a < b$. Положим по определению

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$,

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

для любых a и b (при перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Положим на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$

$$m_i = \min_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), M_i = \max_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x),$$

и пусть $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1},x_i]$ – точки, в которых $f(\xi_i') = m_i, f(\xi_i'') = M_i$, так что для любого $x \in [x_{i-1},x_i]$ выполняются неравенства $m_i \le f(x) \le M_i$.

Суммы $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ называются соответственно **нижними и верхними интегральными суммами**. Очевидно, при одном и том же разбиении отрезка $[a,b]$ всякая интегральная сумма не меньше нижней и не больше верхней интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

Отсюда следует, что для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы существовал общий конечный предел нижних и верхних интегральных сумм при стремлении $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i$ к 0. Можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. Другими словами: **всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке**. Интегрируемыми являются также кусочно непрерывные функции, то есть функции, имеющие на отрезке лишь конечное число точек разрыва 1-го рода. Можно также доказать, что *всякая интегрируемая на отрезке функция ограничена на этом отрезке*.

2.1.3. Геометрический смысл верхних и нижних интегральных сумм и определенного интеграла от неотрицательной функции

Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ неотрицательна. Назовем **криволинейной трапецией** фигуру, ограниченную отрезком $[a,b]$

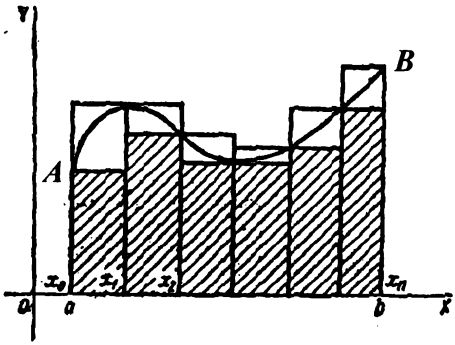


Рис. 1

оси x, дугой AB графика функции $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 1).

Каждый член $m_i\Delta x_i$ нижней интегральной суммы равен площади прямоугольника высоты m_i, имеющего основанием отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а вся нижняя интегральная сумма равна площади, составленной из таких прямоугольников ступенчатой фигуры, вписанной в криволинейную трапецию (на рисунке эта ступенчатая фигура заштрихована). Аналогично, верхняя интегральная сумма равна площади, описанной около криволинейной трапеции ступенчатой фигуры. Тогда определенный интеграл, являющийся общим пределом нижних и верхних интегральных сумм, равен общему пределу площадей вписанных в криволинейную трапецию и описанных около нее ступенчатых фигур, который и принимается за площадь криволинейной трапеции. Таким образом, мы приходим к следующему геометрическому смыслу определенного интеграла: *определенный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *от неотрицательной на отрезке* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *равен площади криволинейной трапеции* $aABb$.

2.1.4. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b dx = b-a$ (ибо при $f(x)\equiv 1$ любая интегральная сумма равна $\sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = b-a$).

2. **Линейность.** *Для любых двух интегрируемых на отрезке* $[a,b]$ *функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *и любых чисел* λ *и* μ *справедливо равенство*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \qquad (2.2)$$

Действительно, пусть разбиение отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,..., n$, будут общими для всех трех интегралов в равенстве (2.2). Тогда для интегральных сумм этих интегралов, как для сумм из конечного числа слагаемых, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)]\Delta x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, получим доказываемое утверждение.

3. **Аддитивность по области интегрирования**. *Если отрезок* $[a,b]$ *разбит точкой* c *на два отрезка* $[a,c]$ *и* $[c,b]$ *и* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.3)$$

Действительно, так как $\int_a^b f(x)dx$ не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на n частей, то можно рассматривать лишь те разбиения, для которых точка c входит в число точек деления. Тогда это разбиение отрезка $[a,b]$ порождает разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c$ и $c = x_m < x_{m+1} < ... < x_n = b$ и справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$ и учитывая, что при этом будет также $\max_{1\le i\le m}\Delta x_i \to 0$ и $\max_{m+1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, получим доказываемое утверждение.

Следствие. Равенство (2.3) справедливо при любом расположении трех точек a,b,c. Действительно, в случае $a<b<c$ по доказанному имеем

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство в остальных четырех случаях аналогично.

Следующие два свойства могут быть доказаны подобно тому, как доказывались свойства 1 и 2.

4. **Монотонность**. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\ge g(x)$ для любых $x\in[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx. \qquad (2.4)$$

5. **Оценка модуля интеграла**. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (2.5)$$

Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ из свойств 1, 4 и 5 вытекает

Следствие: $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \max_{a\le x\le b}|f(x)|(b-a) \qquad (2.5')$$

6. **Теорема о среднем**. *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то существует по крайней мере одна точка* ξ *на отрезке* $[a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (2.6)$$

Доказательство. Пусть $m = \min_{a\le x\le b} f(x), M = \max_{a\le x\le b} f(x)$, так что $m \le f(x) \le M$ для любых $x \in [a,b]$. Тогда в силу монотонности и линейности определенного интеграла имеем:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M(b-a)$$

и, деля на $(b-a)$, получаем

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Так как непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим, то найдется по крайней мере одна точка ξ на отрезке $[a,b]$ такая, что

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

откуда следует доказываемое равенство (2.6).

Геометрический смысл теоремы о среднем. Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ неотрицательной функции $f(x)$ найдется на отрезке $[a,b]$ по крайней мере одна точка ξ такая, что криволинейная трапеция $aABb$ равновелика прямоугольнику, основанием которого служит отрезок $[a,b]$, а высота равна значению функции $f(\xi)$ (рис. 2).

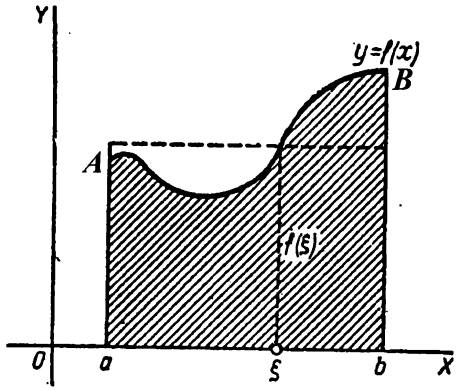


Рис. 2

2.2. Интеграл с переменным верхним пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница

2.2.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Целью этого параграфа будет установление связи определенного интеграла с неопределенным. Введя понятие интеграла с переменным верхним пределом, мы покажем, что в случае, когда подынтегральная функция непрерывна, он является первообразной этой функции.

Предварительно заметим, что 1) определенный интеграл, как предел интегральных сумм, не зависит от того, какой буквой обозначается переменная интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$; 2) функция, интегрируемая на отрезке $[a,b]$, будет интегрируема и на отрезке $[a,x]$ при любом $x \in [a,b]$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Для любого $x \in [a,b]$ положим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

(Здесь для того, чтобы подчеркнуть, что функция $F(x)$ является

функцией переменного верхнего предела, переменная интегрирования обозначена другой буквой).

Докажем, что

1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b) и $F'(x)=f(x)$ *(производная интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции от значения аргумента, равного верхнему пределу)*.

Дадим аргументу x приращение Δx такое, что $x+\Delta x\in[a,b]$, и найдем соответствующее приращение функции $F(x)$:

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла и теорему о среднем, получим

$$\Delta F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,$$

где точка ξ расположена между точками x и $x+\Delta x$. При $\Delta x\to 0$ имеем $\xi\to x$, и в силу непрерывности функции $f(x)$ будет $f(\xi)\to f(x)$. Тогда

1) $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta F(x)=0$, и, следовательно, $F(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a,b]$;

2) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$,

то есть $F(x)$ - дифференцируемая функция и $F'(x)=f(x)$.

Таким образом, всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную, равную интегралу $\int_a^x f(t)dt$, и тогда согласно

определению неопределенного интеграла имеет место равенство

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

2.2.2. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. *Если функция* $F(x)$ *- первообразная функции* $f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Наряду с $F(x)$ первообразной функции $f(x)$ является функция $\int_a^x f(t)dt$. А так как всякие две первообразные одной и той же функции отличаются на константу, то справедливо равенство

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C_1. \qquad (2.7)$$

Полагая в этом равенстве сначала $x = b$, а затем $x = a$, получим

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + C_1$$

$$0 = F(a) + C_1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим формулу Ньютона-Лейбница. Разность $F(b) - F(a)$ в правой части этой формулы записывают также в виде $F(x)\Big|_a^b$.

Пример. Вычислить $\int_1^2 x^3 dx$.

Имеем

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

2.3. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

2.3.1. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, функция $\phi(t)$ монотонна, непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и ее значения принадлежат интервалу непрерывности функции $f(x)$. (Тем самым на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена и непрерывна сложная функция $f[\phi(t)]$). Пусть $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Обозначим через $F(x)$ первообразную функции $f(x)$ (она существует, так как функция $f(x)$ непрерывна). Функция $\phi(x)$ по условию монотонна, непрерывно дифференцируема и ее значения принадлежат интервалу непрерывности функции $f(x)$. Тогда справедлива формула (1.2) замены переменой в неопределенном интеграле и функция $F[\phi(t)]$ является первообразной функции $f[\phi(t)]\phi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)].$$

Но так как $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$, то правые части этих равенств равны. Тогда равны и левые части и формула (2.8) верна.

Замечание. Если при замене переменной в неопределенном интеграле мы от новой переменной t возвращались к первоначальной переменной x, то при замене переменной в определенном интеграле в этом нет необходимости.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x=2\sin t$. Имеем: $x=0$ при $t=0$, $x=2$ при $t=\frac{\pi}{2}$. На отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функция $2\sin t$ монотонна, непрерывно дифференцируема и ее значения не выходят за пределы отрезка [0,2], на котором подынтегральная функция $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ непрерывна. Следовательно, можно воспользоваться заменой переменной $x=2\sin t$. Тогда $\sqrt{4-x^2}=2\cos t, dx=2\cos t dt$ и

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

2.3.2. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad (*)$$

Доказательство. Продифференцируем произведение функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$(u(x)v(x))'=u(x)v'(x)+u'(x)v(x).$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[a,b]$.

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Применяя к интегралу в левой части этого равенства формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$(u(x)v(x))\Big|_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. Равенство (*) с учетом того, что $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$, записывают короче в виде

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (2.9)$$

и называют **формулой интегрирования по частям в определенном интеграле**.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Решение. Положим $u = x, dv = \cos x dx$. Найдем отсюда $v = \sin x$, $du = dx$. Тогда

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} udv = uv\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} vdu = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \cos x\Big|_0^{\pi} = -1 - 1 = -2.$$

2.4. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла на случаи, 1) когда областью интегрирования является не отрезок $[a,b]$, а полупрямые $[a,+\infty), (-\infty,b]$ или вся прямая $(-\infty,+\infty)$, и 2) когда функция имеет точки разрыва 2-го рода, в окрестностях которых функция неограничена.

2.4.1. Несобственные интегралы от непрерывных функций на бесконечном промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a,+\infty)$. Тогда для любого числа $b, b > a$, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. Будем рассматривать его как функцию верхнего предела b и перейдем к пределу при $b \to +\infty$. Положим

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.10)$$

Стоящий в левой части этого равенства интеграл называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$. На рис.3 в случае неотрицательной функции $f(x)$ проиллюстрировано вычисление площади фигуры, ограниченной снизу полупрямой $[a,+\infty)$, сверху графиком функции $f(x)$ и слева прямой $x = a$, как предела площади криволинейной трапеции $aABb$ при $b \to +\infty$.

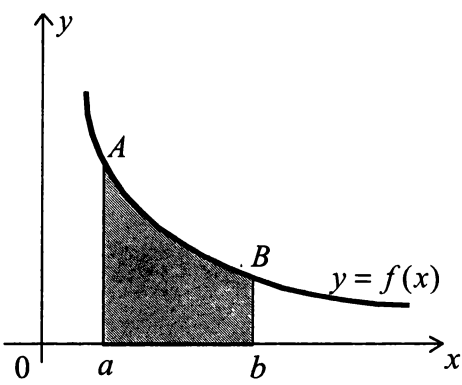


Рис. 3

Если $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ *существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ **сходится**. *В противном случае (когда предел бесконечен или не существует) говорят, что несобственный интеграл* **расходится**.

Аналогично вводится несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на полупрямой $(-\infty, b]$,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2.11)$$

и говорят, что он сходится, если этот предел существует и конечен, и расходится в противном случае.

Несобственный интеграл от непрерывной функции на всей прямой $(-\infty,+\infty)$ *определяется равенством*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2.12)$$

где c *- произвольно фиксированная точка. При этом говорят, что он сходится, если сходится каждый из двух несобственных интегралов в правой части этого равенства, и расходится, если хотя бы один из несобственных интегралов справа расходится.*

Пример 1. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x}\Big|_0^b) = \lim_{b\to+\infty} [-e^{-b}+1] = 1,$

и данный несобственный интеграл сходится.

Пример 2. $\int_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} (\sin x\Big|_0^b) = \lim_{b\to+\infty} \sin b,$

но $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ не существует. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится .

Пример 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится и равен π.

2.4.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций на конечном промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и неограничена в окрестности точки b. Тогда для любого положительного числа ε такого, что $a<b-\varepsilon$, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b-\varepsilon]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определим как предел определенного интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при стремлении ε к 0 (рис.4):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.13)$$

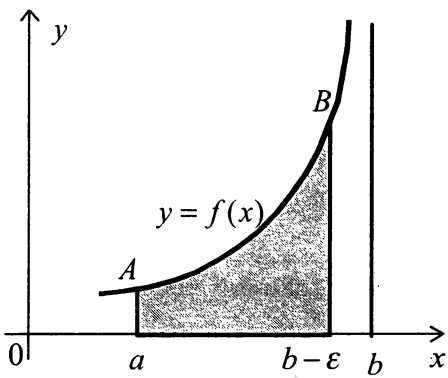


Рис. 4

Если в правой части этого равенства предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon\to+0$ существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **сходится**, в противном случае - **расходится**.

Аналогично, для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a,b]$ и неограниченной в окрестности точки a, определим несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ согласно равенству

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \qquad (2.14)$$

где ε - произвольное положительное число такое, что $a+\varepsilon < b$.

Если $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, в противном случае - расходится.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, кроме внутренней точки c, и неограничена в окрестности этой точки. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ определим согласно равенству

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.15)$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, если сходится каждый из двух интегралов в правой части этого равенства, и расходится в противном случае.

Пример. Проверить, что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывна на полуинтервале $(0,1]$ и $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 \right] = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ так как } 1-\alpha > 0.$$

Пусть $\alpha > 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 \right] = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = -\infty, \text{ так как } 1-\alpha < 0.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln x \Big|_\varepsilon^1 \right] = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-\ln \varepsilon \right] = +\infty.$$

Следовательно, при $0 < \alpha < 1$ данный несобственный интеграл сходится, а при $\alpha \geq 1$ расходится.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В главе 2 мы уже говорили о задачах, решение которых приводит к использованию определенного интеграла: задачи о вычислении массы неоднородного стержня, работы переменной силы. Рассмотрим ряд геометрических приложений определенного интеграла.

3.1. Площадь плоской фигуры

3.1.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

Как мы знаем из геометрического смысла определенного интеграла (см. 2.1.3.), площадь S криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной отрезком $[a,b]$ оси x, графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ и прямыми $x=a, x=b$ (рис.1), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рассмотрим теперь вычисление площади областей более общего вида.

I. Пусть область D ограничена прямыми $x=a, x=b$ и непрерывными кривыми $y=f_1(x), y=f_2(x)$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ для любых $x \in [a,b]$ (рис. 5,а). Такие области называются **правильными относительно оси** y. Тогда ее площадь S вычисляется по формуле

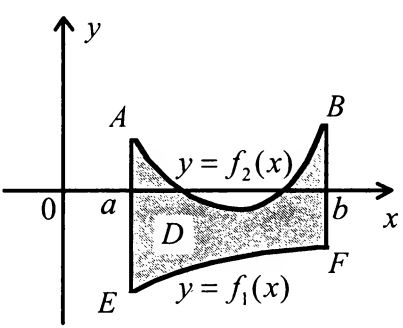


Рис. 5а

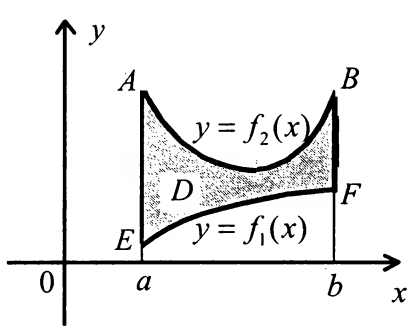


Рис. 5б

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (3.1)$$

Действительно, в случае $f_1(x) \geq 0$ область D есть разность двух криволинейных трапеций $aABb$ и $aEFb$ (рис. 5,б). Общий же случай сводится к предыдущему с помощью сдвига $x' = x, y' = y - C$ вдоль оси y вниз, где константа $C < \min_{a \leq x \leq b} f_1(x)$, (так как при этом разность ординат не меняется).

II. Пусть область D ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и непрерывными кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, где $g_1(y) \leq g_2(y)$ для любых $y \in [c, d]$ (рис. 6). Такие области называются **правильными относительно оси** x. Тогда ее площадь S вычисляется аналогично по формуле

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy \qquad (3.2)$$

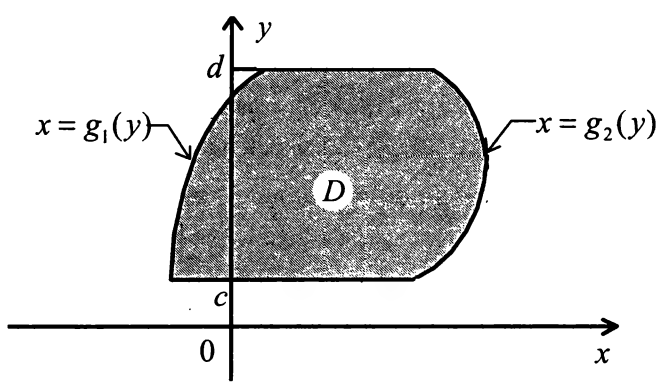


Рис. 6

III. Область D может быть разбита на конечное число областей D_j I-го и II-го типа. Тогда вычисляя площади каждой из областей D_j соответственно по формулам (3.1) и (3.2) и складывая их, получим

площадь области D.

Пример 1. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$ (рис. 7).

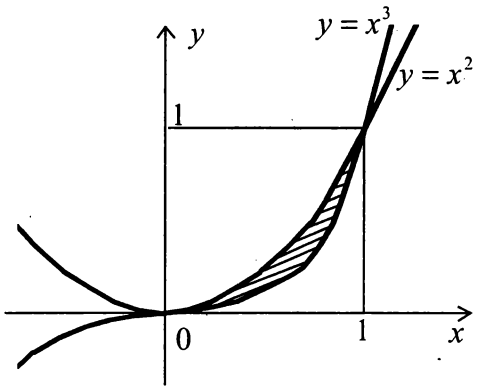


Рис. 7

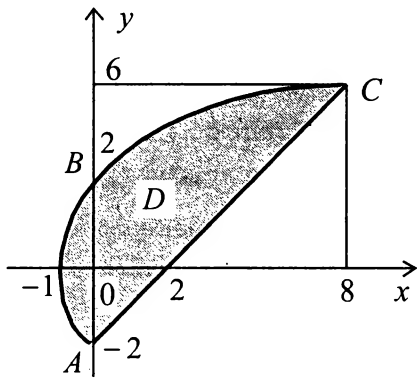


Рис. 8

Будем рассматривать нашу область, как правильную относительно оси y: $x^3 \le x^2$ для любых $x \in [0,1]$. Тогда по формуле (3.1) получим:

$$S = \int_0^1 [x^2 - x^3]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Пример 2. Вычислить площадь области, ограниченной параболой $y^2 = 4(x+1)$ и прямой $x - y - 2 = 0$ (рис. 8).

Будем рассматривать данную область, как правильную относительно оси x. Тогда следует разрешить уравнения параболы и прямой относительно x и найти ординаты точек пересечения параболы с прямой. Имеем:

$$\cup ABC : x = \frac{y^2}{4} - 1$$

$$AC : x = y + 2.$$

Решая систему этих уравнений, получим $y_A = -2, y_C = 6$. Тогда

$\frac{y^2}{4} - 1 \le y + 2$ для любых $y \in [-2,+6]$ и по формуле (3.2)

$$S=\int_{-2}^{6}[y+2-(\frac{y^2}{4}-1)]dy=\left[\frac{y^2}{2}+3y-\frac{y^3}{12}\right]\Bigg|_{-2}^{6}=21\frac{1}{3}.$$

3.1.2. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Введем на плоскости полярную систему координат с полюсом O и полярной осью OP. Пусть OAB - **криволинейный сектор,** ограниченный лучами $OA:\varphi=\alpha, OB:\varphi=\beta, \alpha<\beta$, и кривой $r=r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ – непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[\alpha,\beta]$ (рис. 9). Требуется найти его площадь.

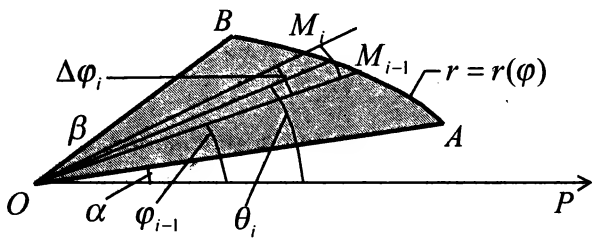


Рис. 9

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на n частей точками $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<...<\varphi_n=\beta$ и проведем лучи $OM_i:\varphi=\varphi_i, i=1,...,n-1$. Криволинейный сектор OAB разобьется на n криволинейных секторов $OM_{i-1}M_i$ с углами $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$, $i=1,...,n$. На каждом отрезке $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ выберем точку θ_i и проведем радиусом $r(\theta_i)$ с центром в точке O дугу окружности. Тогда площадь криволинейного сектора $OM_{i-1}M_i$ можно приближенно заменить площадью кругового сектора радиуса $r(\theta_i)$ с центральным углом $\Delta\varphi_i$, равной $\frac{1}{2}[r(\theta_i)]^2\Delta\varphi_i$, а площадь всего криволинейного сектора OAB - интегральной суммой:

$$S_{OAB}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[r(\theta_i)]^2\Delta\varphi_i.$$

Переходя к пределу при $\max_{1\le i\le n}\Delta\varphi_i \to 0$ и учитывая, что $r(\varphi)$ – непрерывная функция, получим:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \qquad (3.3)$$

Площадь фигуры $ABCD$, ограниченной лучами $\varphi=\alpha,\varphi=\beta$ и кривыми $r=r_1(\varphi), r=r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$ – непрерывные неотрицательные функции такие, что $r_1(\varphi)\le r_2(\varphi)$ для любых $\varphi\in[\alpha,\beta]$ (рис. 10), очевидно вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)]d\varphi.$$

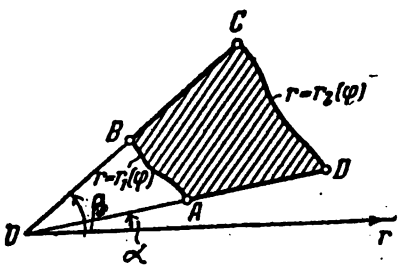


Рис. 10

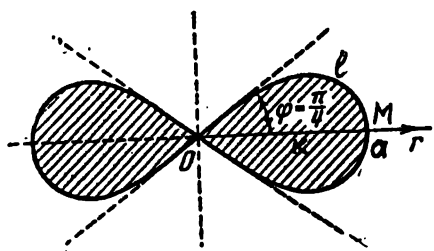


Рис. 11

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (рис. 11).

Функция $r=r(\varphi)$ определена при $\cos 2\varphi \ge 0$, и, следовательно, при $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. Нетрудно видеть, что искомая площадь S равна $4S_{OkMlO}$. Тогда

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi\right) = a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

3.1.3. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания граничной кривой

Для вычисления площади криволинейной трапеции $aABb$ при задании дуги AB кривой параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, где $y(t)$ непрерывна, а $x(t)$ монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, достаточно в формуле для вычисления площади в прямоугольных декартовых координатах сделать в интеграле замену переменной $x = x(t)$:

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt.$$

При монотонном убывании $x(t)$, то есть при $\dot{x}(t) < 0, x(\alpha) = b, x(\beta) = a$ будем иметь

$$S = \int_a^b y dx = \int_\beta^\alpha y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$.

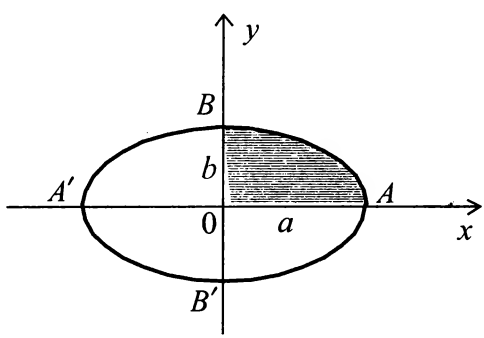


Рис. 12

Искомая площадь равна $4S_{AOB} = 4\int_0^a y dx$ (рис.12). $x_B = 0$ при

$t=\frac{\pi}{2}$, $x_A=a$, при $t=0$, $\dot{x}(t)=-a\sin t$ и

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt=2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt=$$

$$=2ab\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

3.2. Объем тела вращения

3.2.1. Формула для вычисления объема тела через площади его параллельных сечений

Пусть a и b соответственно наименьшая и наибольшая абсциссы точек тела и площадь сечения тела плоскостью $x=const$ есть известная функция $S(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Тогда для вычисления объема тела справедлива формула

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (3.4)$$

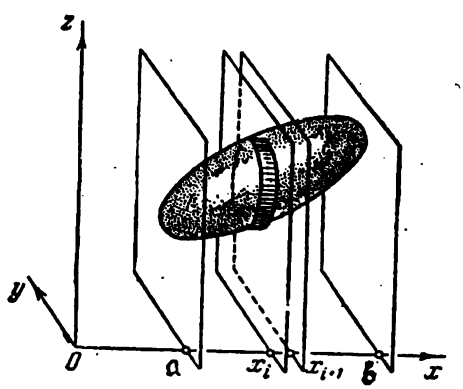


Рис. 13

Действительно, разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и проведем через эти точки деления плоскости, перпендикулярные оси x. При этом тело разобьется на диски (рис.13) высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Для каждого $i = 1,...,n$ объем i-го диска заменим приближенно объемом прямого цилиндра с площадью основания $S(x_i): \Delta V_i = S(x_i)\Delta x_i$, а объем всего тела – интегральной суммой $\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$, получим

$$V = \lim_{\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

3.2.2. Формула для вычисления объема тела вращения

Пусть тело образовано вращением вокруг оси x криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 14), дуга AB которой задана уравнением $y = y(x)$,

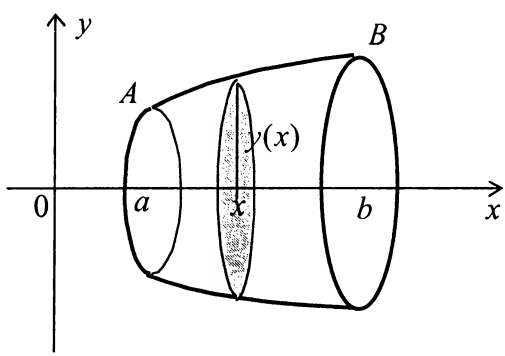


Рис. 14

где $y(x)$ – непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда сечением тела плоскостью $x = const$ является круг радиуса $y(x)$, площадь которого $S(x)$ равна $\pi\, y^2(x)$. Согласно формуле (3.4) получим для объема тела вращения формулу

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx \qquad (3.5)$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностью параболоида вращения $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$.

Решение. В данном случае тело образовано вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной осью x, дугой параболы $y = x^2$ и прямой $x = 2$. Поэтому по формуле (3.5) получаем

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 6\frac{2}{5}\pi .$$

3.3. Длина дуги кривой

Пусть AB - несамопересекающаяся незамкнутая дуга кривой. Такие дуги называются также **простыми** дугами. *За длину простой дуги принимают предел периметров вписанных ломаных при стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев ломаной, если этот предел существует и конечен.* В случае замкнутой кривой, а также самопересекающейся кривой, когда она может быть разбита на конечное число простых дуг, за длину кривой принимают сумму длин простых дуг, ее составляющих.

3.3.1. Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах

Пусть дуга AB задана уравнением $y = y(x), a \le x \le b$, где функция $y(x)$ - непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда ее длина s вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \qquad (3.6)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и впишем в дугу AB ломаную $M_0M_1...,M_n$, абсциссами вершин которой были бы точки деления x_i отрезка $[a,b]$ (рис. 15). Пусть $P_{M_0M_1...M_n}$ – периметр ломаной, $|M_{i-1}M_i|$ – длина звена

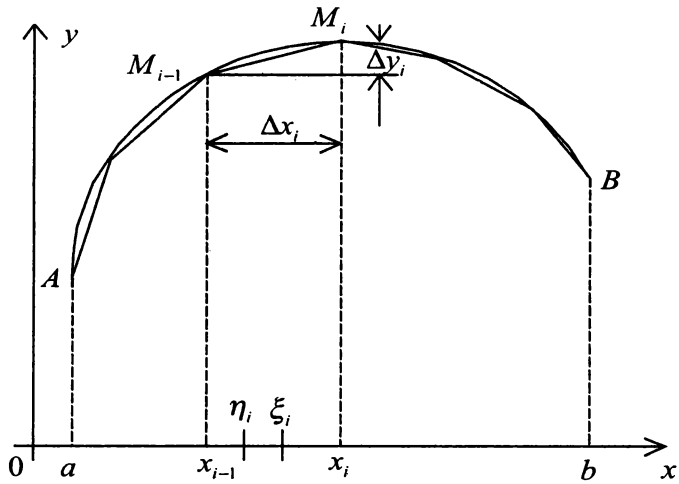


Рис. 15

$M_{i-1}M_i$. Тогда $s = \lim_{\max_{1\le i\le n}|M_{i-1}M_i|\to 0} P_{M_0\dots M_n}$. Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. По теореме Пифагора длина звена $M_{i-1}M_i$ ломаной будет равна $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Так как $y(x)$ – дифференцируемая функция, то по теореме Лагранжа существует точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ такая, что $\Delta y_i = y'(\xi_i)\Delta x_i$. Тогда $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{1+[y'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$ и $P_{M_0\dots M_n} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[y'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$. По условию производная $y'(x)$ непрерывна. Следовательно, функция $\sqrt{1+[y'(x)]^2}$ непрерывна. При $\max_{1\le i\le n}|M_{i-1}M_i| \to 0$ будет также $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{\max_{1\le i\le n}\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[y'(\xi_i)]^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Тем самым доказана справедливость формулы (3.6).

Пример. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}, 0 \le x \le 1$.

Решение. Функция $y = 2\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, ее производная $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна на полуинтервале $(0,1]$ и $\lim_{x\to 0} y'(x) = \infty$. Поэтому для длины данной дуги параболы по формуле (3.6) получаем несобственный интеграл $s = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$.

Определение таких несобственных интегралов было рассмотрено в 2.4.2. По формуле (2.14)

$$s = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx.$$

Имеем

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = \int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,dx + \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| ..$$

Тогда $s = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|\right]\Big|_\varepsilon^1 =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{2} + 0{,}5\ln(1{,}5+\sqrt{2}) - \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon} - 0{,}5\ln\left|\varepsilon+0{,}5+\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}\right|\right] =$$

$$= \sqrt{2} + 0{,}5\ln(3+2\sqrt{2}).$$

3.3.2. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями

Пусть дуга AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta, \qquad (*)$$

где $x(t), y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции на отрезке

$[\alpha,\beta], \dot{x}^2+\dot{y}^2 \neq 0$ и $x(t)$ – монотонная функция. Тогда длина s дуги AB вычисляется по формуле

$$s=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad (3.7)$$

Действительно, пусть сначала функция $x(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[\alpha,\beta]$. При сделанных предположениях относительно функций $x(t)$ и $y(t)$ уравнения (*) определяют дифференцируемую функцию $y=f(x)$ и длина дуги может быть вычислена по формуле $s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, где $a=x(\alpha), b=x(\beta)$. Сделаем в этом интеграле замену переменной $x=x(t)$. Учитывая, что $f'(x)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $\dot{x}>0$, получим

$$s=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\,\dot{x}dt=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

В случае, когда функция $x(t)$ монотонно убывает на отрезке $[\alpha,\beta]$, будет выполняться неравенство $a>b$ и длина дуги будет равна $s=\int_b^a \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Делая в интеграле замену переменной $x=x(t)$ и учитывая, что теперь $\dot{x}<0$ и $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}=-1$, получим

$$s=\int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\,\dot{x}dt=\int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,(-1)dt=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $x=\frac{t^2}{2}, y=\frac{t^3}{3}$, отсеченной прямой $x=1$ (рис.16).

Длина s дуги AOB равна удвоенной длине дуги AO. Значение параметра t, соответствующее точке A пересечения параболы с прямой, найдем из системы уравнений $x=\frac{t^2}{2}, x=1$. Получим $t_A=\sqrt{2}$. Аналогично $t_O=0$. Тогда

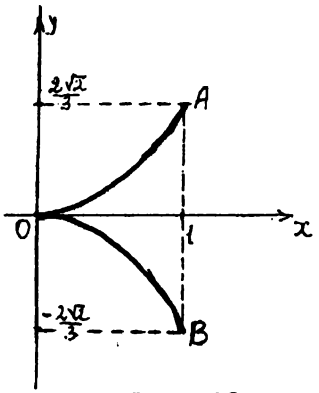


Рис. 16

$$s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\;t\,dt=\frac{2}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

Замечание. Для длины s дуги пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, где $x(t),y(t),z(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции, может быть получена формула $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$.

3.3.3. Длина дуги кривой в полярных координатах

Пусть полюсом и полярной осью полярной системы координат являются начало координат O и ось x декартовой системы координат. Обозначим через (r,φ) – полярные координаты точки (x,y), так что $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$.

Пусть дуга AB задана уравнением $r=r(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$, где $r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда длина s дуги AB вычисляется по формуле

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi \qquad (3.8)$$

Действительно, при $r = r(\varphi)$ будем иметь параметрические уравнения дуги $AB: x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi, \alpha \le \varphi \le \beta$.

Тогда по формуле (3.7) длина s дуги AB будет равна интегралу

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

Найдя $\dot{x}(\varphi), \dot{y}(\varphi)$ и преобразовывая подкоренное выражение, получим:

$\dot{x}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \dot{y}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$

$[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2 = \dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)$ и

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Пример. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Длина s всей кардиоиды равна удвоенной длине ее дуги, вдоль которой φ изменяется от 0 до π (рис.17), так что

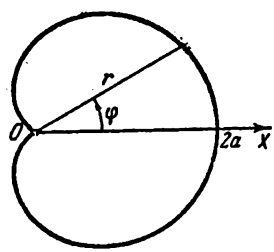


Рис. 17

$$s = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi.$$

Имеем

$$\dot{r}(\varphi) = -a\sin\varphi, r^2 + \dot{r}^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) =$$

$$= 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad s = 4a\int_{0}^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi} = 8a.$$

3.3.4. Дифференциал переменной длины дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = y(x), a \le x \le b$, где функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Будем рассматривать на этой дуге переменную точку C с абсциссой x. Тогда

длина дуги AC будет функцией $s(x)$ переменной x :

$$s(x)=\int_a^x \sqrt{1+[y'(u)]^2}\,du\,.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что определенный интеграл на отрезке $[a,x]$ не зависит от того, какой буквой обозначается переменная интегрирования.) Функция $s(x)$, как интеграл с переменным верхним пределом, дифференцируема и ее производная и дифференциал соответственно равны

$$s'(x)=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,,ds=s'(x)dx=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \qquad (3.9)$$

Аналогично для дуги, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, где $x(t),y(t)$ - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции, длина $s(t)$ переменной дуги будет функцией t, определяемой равенством

$$s(t)=\int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)}\,d\tau$$

и ее дифференциал будет равен

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\,. \qquad (3.10)$$

В случае дуги с уравнением в полярных координатах $r=r(\phi)$ имеем аналогично $ds=\sqrt{r^2(\phi)+\dot{r}^2(\phi)}\,d\phi$.

Для пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $x(t),y(t),z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha,\beta]$, имеем

$$s(t)=\int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,d\tau \qquad (3.12)$$

Так как $\frac{ds}{dt}>0$, то $s(t)$ монотонна и имеет обратную функцию $t=t(s)$. Следовательно, длина дуги может служить параметром и

уравнения кривой тогда примут вид

$$x=\phi(s), y=\psi(s), z=\chi(s), 0\le s\le S_{AB},$$

где $\phi(s)=x[t(s)], \psi(s)=y[t(s)], \chi(s)=z[t(s)]$. Эти уравнения называются *натуральными уравнениями* кривой.

3.4. Площадь поверхности вращения

Пусть поверхность σ образована вращением вокруг оси x дуги AB, заданной уравнением $y=f(x), x\in[a,b]$, где $f(x)$ – неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция. Поставим задачу: вычислить площадь этой поверхности.

За площадь S поверхности вращения σ принимают предел площадей поверхностей, образованных вращением вокруг оси x вписанных в дугу AB ломаных, при неограниченном увеличении числа звеньев ломаной и стремлении к нулю наибольшей из длин ее звеньев. Покажем, что

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (3.13)$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ и впишем в дугу AB ломаную с вершинами $M_i(x_i,f(x_i)), i=0,1,\ldots,n$. Площадь поверхности, образованной вращением этой ломаной вокруг оси x, есть сумма площадей боковых поверхностей усеченных конусов. Площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученной при вращении вокруг оси x звена $M_{i-1}M_i$ (рис.18), равна

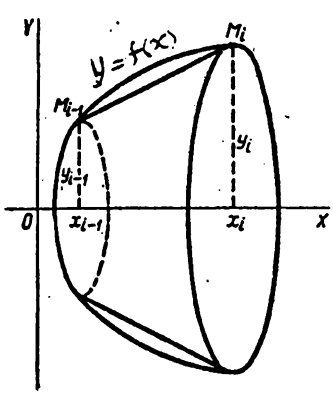


Рис. 18

$$2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}|M_{i-1}M_i|,$$

где $y_{i-1}=f(x_{i-1}), y_i=f(x_i)$ и $|M_{i-1}M_i|$ - длина звена $M_{i-1}M_i$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема, то (см. вывод формулы

(3.6) в п.3 этой главы)

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i,$$

где ξ_i - некоторая точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, а так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, то существует точка $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ такая, что $f(\eta_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. Тогда площадь боковой поверхности рассматриваемого усеченного конуса равна $2\pi f(\eta_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$, а площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси x всей ломаной, равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\eta_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Наряду с этой суммой рассмотрим интегральную сумму

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

для интеграла в формуле (3.13) и перейдем к пределу при $\max_{1\le i\le n}|M_{i-1}M_i| \to 0$. Заметим, что при этом будет $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$. Так как $f(x)$ - непрерывно дифференцируема, то функция $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и

$$\lim_{\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0} J_n = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Можно доказать, что для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ суммы S_n и J_n будут при этом иметь общий предел, что доказывает равенство (3.13).

Пример. Вычислить площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 4x$, отсеченной плоскостью $x = 1$.

Решение. Данная поверхность является поверхностью, образованной вращением вокруг оси x дуги параболы $y^2 = 4x$,

$0 \le x \le 1$. Тогда $y = 2\sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и по формуле (3.13) получаем

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \frac{8}{3}\pi(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi[2\sqrt{2}-1].$$

Получим теперь формулы для площади поверхности вращения в случаях, когда дуга AB задана параметрическими уравнениями или уравнением в полярных координатах. Заметим, что согласно равенству (3.9) $\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = ds(x)$ и формула (3.13) может быть записана в виде

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)ds(x). \qquad (3.14)$$

Тогда в случае задания дуги AB параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta], x(t)$ – монотонна и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, в результате замены переменной $x = x(t)$ в интеграле в равенстве (3.14) с учетом равенства (3.10) получаем $f[x(t)] = y(t), ds(x) = ds(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$ что приводит к интегралу

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Аналогично, в случае, когда дуга AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\phi)$, где $r(\phi)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, замена переменной $x = r(\phi)\cos(\phi)$ дает $f(x) = y = r(\phi)\sin\phi$,

$ds(x) = ds(\phi) = \sqrt{r^2(\phi) + \dot{r}^2(\phi)}d\phi$ и

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\phi)\sin\phi\sqrt{r^2(\phi) + \dot{r}^2(\phi)}d\phi .$$

4. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Определение кратного интеграла, условие существования и свойства кратного интеграла

Ряд важных геометрических и физических задач приводит к интегрированию функций нескольких переменных. Конструкция кратного интеграла аналогична конструкции определенного интеграла для функции одной действительной переменной, заданной на отрезке числовой оси. Начнем со случая двух независимых переменных.

Рассмотрим заданную в ограниченной замкнутой области D плоскости Oxy непрерывную функцию $f(x,y)$. Разобьем произвольным образом область D на конечное число частей D_i площадью ΔS_i. Выберем точки $P_i \in D_i$ (рис.19). Мелкостью разбиения назовем наибольший из диаметров элементов разбиения (напомним, что под диаметром области понимается наибольшее расстояние между точками, лежащими на границе области).

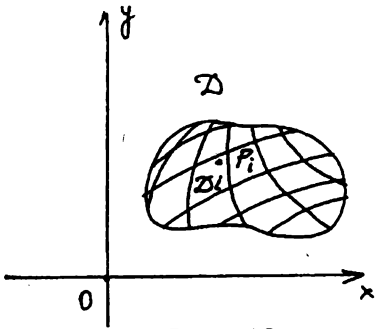


Рис. 19

Выражение $\sigma(f) = \sum_i f(P_i)\Delta S_i$ (суммируем по всем элементам разбиения) называется **интегральной суммой (Римана) функции** f, соответствующей данному разбиению области D и фиксированному выбору точек $P_i \in D_i$.

Поведение интегральных сумм при уменьшении мелкости разбиений можно охарактеризовать следующим образом. Существует число I, удовлетворяющее условию: для любого положительного (сколь угодно малого) числа ε найдется такое положительное число δ, что для всякого разбиения мелкости меньше, чем δ и при любом выборе точек P_i выполняется неравенство $|I - \sigma(f)| < \varepsilon$. Это число I называется **двойным интегралом от функции** f **по области** D и

обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Таким образом, можно сказать, что двойной интеграл есть предел интегральных сумм при мелкости разбиений, стремящейся к нулю. Если сделать разбиение достаточно мелким, то, независимо от выбора точек, принадлежащих элементам разбиения, интегральная сумма будет мало отличаться от двойного интеграла.

Отметим, что требование непрерывности функции в ограниченной замкнутой области является достаточным, но не необходимым для существования интеграла. Одним из необходимых условий существования интеграла является ограниченность функции. С другой стороны, интеграл существует и для многих ограниченных разрывных функций.

Из свойств интегральных сумм вытекают *основные свойства двойного интеграла*.

1. Если $f(x,y)\equiv 1$ в области D, то соответствующий интеграл $\iint\limits_D dxdy$ равен площади S области D.

Действительно, в этом случае любая интегральная сумма $\sigma(f)$ равна S.

2. Для любых (непрерывных в D) функций f и g и постоянных λ и μ имеет место равенство

$$\iint\limits_D (\lambda f(x,y)+\mu g(x,y))dxdy=\lambda\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\mu\iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Действительно, при любом разбиении области D на части D_i и выборе точек $P_i\in D_i$, будем иметь

$$\sum_i (\lambda f(P_i)+\mu g(P_i))\Delta S_i=\lambda\sum_i f(P_i)\Delta S_i+\mu\sum_i g(P_i)\Delta S_i,$$ т.е.

$$\sigma(\lambda f+\mu g)=\lambda\sigma(f)+\mu\sigma(g).$$

Переходя в этом равенстве для интегральных сумм к пределу при мелкости разбиений, стремящейся к нулю, получим нужное равенство для интегралов. Свойство 2 называется **линейностью двойного интеграла**.

3. Для любого разбиения области D на подобласти D' и D'' и

для любой (непрерывной в D) функции f имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy.$$

Действительно, разобьем в свою очередь D' и D'' на части D'_i, D''_j и выберем точки $P'_i \in D'_i$, $P''_j \in D''_j$. Соответствующие интегральные суммы обозначим $\sigma'(f), \sigma''(f)$. С другой стороны, рассмотрим такое разбиение области D, элементами которого являются все D'_i и D''_j с уже выбранными точками P'_i и P''_j. Мелкость этого общего разбиения равна большей из мелкостей разбиений подобластей D' и D''. Интегральную сумму, соответствующую данному разбиению, обозначим $\sigma(f)$. Очевидно,

$$\sigma(f) = \sigma'(f) + \sigma''(f).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, когда мелкости разбиений D' и D'' стремятся к нулю (в этом случае мелкость соответствующего разбиения области D также стремится к нулю), получим свойство 3, которое называется **аддитивностью двойного интеграла по области интегрирования**.

4. Для любых (непрерывных в D) функций f и g таких, что $f(x,y) \le g(x,y), ((x,y) \in D)$ имеет место неравенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать очевидное неравенство для интегральных сумм функций f и g:

$$\sigma(f) \le \sigma(g),$$

и перейти к пределу при мелкости разбиений, стремящейся к нулю.

Свойство 4 называется **монотонностью интеграла**.

5. Для любой (непрерывной в D) функции f имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Оно следует из свойства 4 и двойного неравенства

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)| \quad ((x,y)\in D).$$

6. Для любой (непрерывной в D) функции f имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le M \cdot S,$$

где $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$, а S – площадь области D.

Свойство 6 следует из свойств 1,2,5 и неравенства

$$|f(x,y)| \le M, ((x,y)\in D), ((x,y)\in D).$$

Величина $\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S}$ называется **средним значением функции f по области D**. Имеет место следующая теорема о среднем.

Теорема 1. Если функция f непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то внутри области D найдется точка P такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(P)\cdot S.$$

Другими словами, непрерывная функция принимает среднее значение внутри области.

Для функции трех независимых переменных $f(x,y,z)$, заданной в трехмерной области G, подобным образом вводится понятие тройного интеграла. Область G разбивается на части G_i объемом ΔV_i, выбираются точки $P_i \in G_i$ и составляется интегральная сумма $\sum\limits_i f(P_i)\Delta V_i$. При условии непрерывности функции f в ограниченной

замкнутой области G существует предел интегральных сумм, когда мелкость разбиений (т.е. наименьший из диаметров элементов разбиений) стремится к нулю. Этот предел называется **тройным интегралом от функции f по области G** и обозначается $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$. На тройной интеграл распространяются все основные свойства двойного интеграла (в 1 и 6 вместо площади S плоской области D в случае тройного интеграла следует писать объем V области G).

4.2. Сведение кратного интеграла к повторному

Основной способ вычисления кратного интеграла состоит в последовательном интегрировании по каждой из переменных.

Плоскую область D вида $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции, назовем **правильной в направлении оси Oy** (рис.20). Предположим, что функция $f(x,y)$ непрерывна в такой области D. Для любого фиксированного $x=x_0$, $a\le x_0\le b$ рассмотрим функцию $f(x_0,y)$ от одной переменной y, непрерывную на отрезке $[\varphi(x_0),\psi(x_0)]$. Для нее существует определенный интеграл $\int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)dy$. Этот

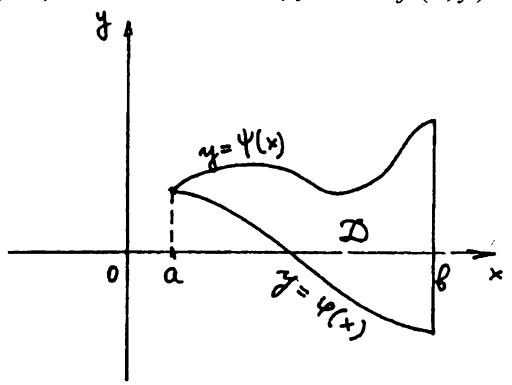


Рис. 20

интеграл, конечно, зависит от точки x_0. Обозначим его $\Phi(x_0)$. Можно показать, что функция $\Phi(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$,

непрерывна на нем. Интеграл $\int_a^b \Phi(x)dx$ от этой функции называется

повторным интегралом от функции $f(x,y)$ **по области** D, и обозначается

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

т.е. двойной интеграл равен повторному интегралу. Таким образом, для вычисления двойного интеграла по правильной в направлении оси Oy области следует вначале, считая x постоянным, проинтегрировать функцию по переменной y, после чего проинтегрировать получившуюся функцию переменной x. Заметим, что если пределы во внешнем интеграле постоянные, то во внутреннем интеграле они, вообще говоря, зависят от x.

Если область D правильная в направлении оси Ox: $D=\{(x,y): c\le x\le d,\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$, то двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ равен повторному интегралу $\int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,y)=x^2y$ по конечной области D, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$ (рис.21).

Решение: Имеем

$$D=\{(x,y): -1\le x\le 1; x^2\le y\le 1\}.$$

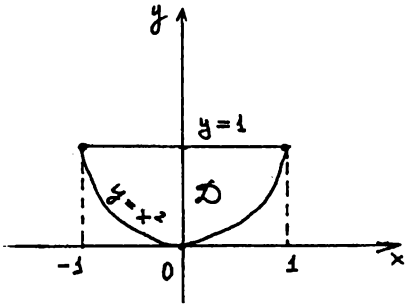


Рис. 21

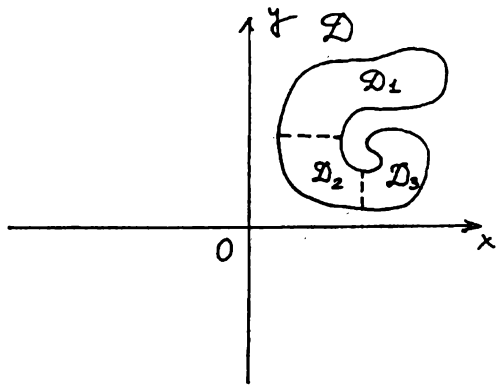


Рис. 22

Поэтому $\iint\limits_D x^2 y dx dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} x^2 y dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^4)dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить интеграл по области, не являющейся правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy, надо попытаться разбить область на конечное число частей, каждая из которых уже будет правильной в направлении какой-либо координатной оси (рис.22). Если это удастся сделать, то, в силу аддитивности интеграла, вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, каждый из которых может быть представлен в виде повторного.

Перейдем теперь к вопросу вычисления тройного интеграла.

Правильной относительно оси Oz называется трехмерная область G вида

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\},$$

где φ и ψ – непрерывные в ограниченной замкнутой области D плоскости Oxy функции (рис.23). Предположим, что функция $f(x, y, z)$ непрерывна в такой области G. Зафиксировав произвольным образом точку $(x_0, y_0) \in D$, рассмотрим функцию $f(x_0, y_0, z)$ одной переменной

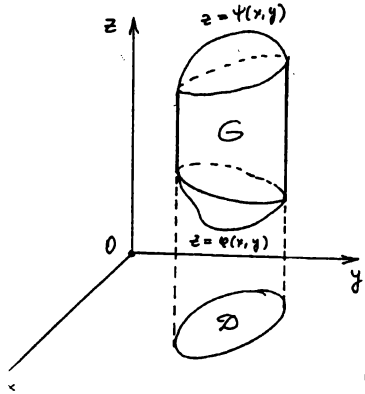


Рис. 23

z, непрерывную на отрезке $[\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0)]$. Возьмем от этой функции определенный интеграл $\int\limits_{\varphi(x_0,y_0)}^{\psi(x_0,y_0)} f(x_0,y_0,z)dz$ (он существует в силу непрерывности функции). Этот интеграл зависит от точки (x_0,y_0). Обозначим его $\Phi(x_0,y_0)$. Определенная на D функция двух переменных $\Phi(x,y)$ оказывается непрерывной на D. Интеграл $\iint\limits_D \Phi(x,y)dxdy$ называют **повторным интегралом** и обозначают $\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$. Для тройных интегралов имеет место утверждение, аналогичное теореме 2: если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области

$G=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

т.е. тройной интеграл равен повторному.

Таким образом, для вычисления тройного интеграла по области, правильной в направлении оси Oz, следует вначале, считая x и y постоянными, проинтегрировать по переменной z, а затем от получившейся функции переменных x и y взять двойной интеграл по проекции области на плоскость Oxy.

Если далее предположить, что область D является правильной в направлении, например, оси Oy:

$$D=\{(x,y):a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\psi_1(x)\},$$

то, записав двойной интеграл по области D в виде повторного, будем иметь

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Если обозначить через $E(x_0)$ сечение области G плоскостью $x = x_0$, $a \le x_0 \le b$, то, объединяя в интеграле справа два внутренних интегрирования по переменным y и z, получим формулу

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{E(x)} f(x,y,z)dydz .$$

Как видим, для тройного интеграла имеется два способа сведения к повторному интегралу.

В частном случае $f(x,y,z) \equiv 1$ получаем формулы для нахождения объема V области G:

$$V = \iint_D (\psi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy = \int_a^b S(x)dx ,$$

где $S(x)$ – площадь сечения $E(x)$. Последнее равенство представляет собой уже известное соотношение (3.4) (см. гл.3), по которому объем тела равен одномерному интегралу от площади переменного сечения.

Пример 2. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x,y,z) = xy^2z^3$ по конечной области G, ограниченной поверхностями $z = xy, y = x, x = 1$ и $z = 0$ (рис. 24).

Решение: Имеем $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$, и $G = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le xy\}$. Поэтому

$$\iiint_G xy^2z^3 dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{xy} xy^2z^3 dz = \iint_D xy^2 \frac{z^4}{4}\Big|_0^{xy} \cdot dxdy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint_D x^5y^6 dxdy = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_0^x x^5y^6 dy = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5 \frac{y^7}{7}\Big|_0^x dx =$$

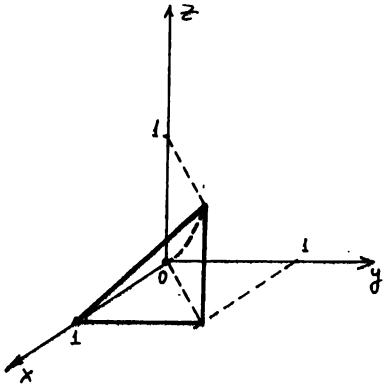


Рис. 24

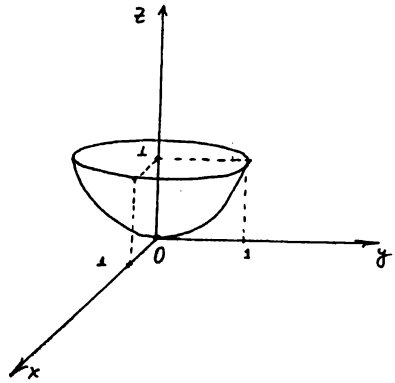


Рис. 25

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{x^{13}}{364}\Big|_0^1 = \frac{1}{364}.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рис. 25).

Решение: Имеем $G = \{(x, y, z) : 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le z\}$. Поэтому $E(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le z\}$ – круг радиуса $\sqrt{z}$, и, следовательно, $S(z) = \pi z$. Тогда

$$V = \int_0^1 S(z)dz = \pi\int_0^1 zdz = \pi\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

4.3. Замена переменных в кратном интеграле

Формулу замены переменных в двойном интеграле рассмотрим на примере вычисления двойного интеграла в полярных координатах.

Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy. Введем на плоскости **полярную систему координат**, взяв за полюс начало координат, а за полярную ось – ось x. **Полярными**

координатами точки называется пара (ρ,φ), где $\rho \geq 0$ – расстояние от точки до полюса, а $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – угол, который образует с полярной осью радиус-вектор точки. Полярные координаты однозначно определяют положение точки на плоскости. Связь между декартовыми и полярными координатами представляется формулами $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ (рис. 26).

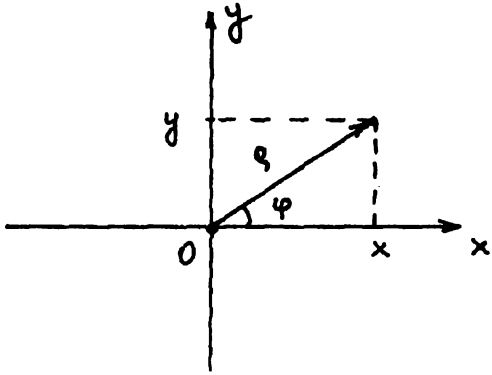


Рис. 26

Пусть D – ограниченная замкнутая область на плоскости Oxy, уравнение границы которой имеет вид $F(x,y)=0$, а сама область D состоит из точек, для которых $F(x,y) \leq 0$. При вычислении двойного интеграла от непрерывной функции $f(x,y)$ по области D можно пользоваться следующей формулой

$$\iint\limits_{\{(x,y):F(x,y)\leq 0\}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\{(\rho,\varphi):F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\leq 0\}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi .$$

При использовании данной формулы надо вместо аргументов x и y исходной функции подставить выражения $\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi$, полученную функцию переменных ρ и φ умножить на ρ и проинтегрировать по области D, перейдя в неравенстве для области к полярным координатам.

Поясним появление множителя ρ в подынтегральном выражении. Используя независимость двойного интеграла от способа разбиения, будем разбивать область интегрирования на части D_i координатной

сеткой полярной системы координат, т.е. концентрическими окружностями с центром в начале координат и лучами, исходящими из начала координат. Рассмотрим те элементы разбиения D_i, которые не пересекаются с границей области. При достаточно мелком разбиении их можно считать прямоугольниками со сторонами $\rho_i \Delta\varphi_i$ и $\Delta\rho_i$ (рис. 27). С другой стороны, слагаемые в

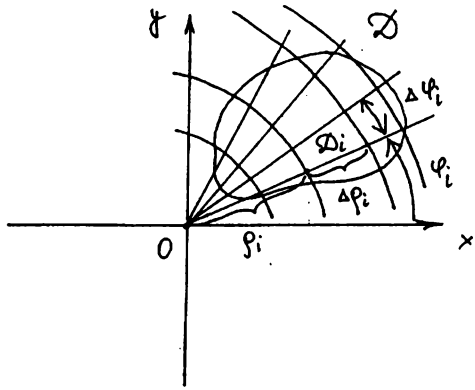


Рис. 27

интегральной сумме, отвечающие тем D_i, которые пересекаются с границей области, при измельчении разбиений не окажут влияния на величину предела. Поэтому интегральную сумму $\sum_i f(x_i, y_i)\Delta S_i$ можно заменить на $\sum_i f(\rho_i \cos\varphi_i, \rho_i \sin\varphi_i)\rho_i \Delta\widetilde{S}_i$, где $\Delta\widetilde{S}_i = \Delta\rho_i \Delta\varphi_i$.

Последняя есть интегральная сумма функции $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho$, определенной на соответствующей области D части $\widetilde{D}$ плоскости переменных ρ, φ, где роль декартовой системы координат играют полярные координаты. При мелкости разбиений стремящейся к нулю она имеет своим пределом двойной интеграл $\iint\limits_{\widetilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$.

Переход к полярным координатам часто приводит к упрощению подынтегрального выражения и (или) области интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл от функции $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ по кругу $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение: Используя формулу перехода к полярным координатам, будем иметь

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \ln(1+x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} \ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho d\rho = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln(1+\rho^2)2\rho d\rho =$$

$$= \pi\int\limits_1^2 \ln u du = \pi\left(u\ln u\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 du \right) = \pi(2\ln 2 - 1).$$

При вычислении тройных интегралов часто пользуются цилиндрическими или сферическими координатами.

Зафиксировав в пространстве декартову систему координат $Oxyz$, **цилиндрическими координатами** точки назовем тройку (ρ,φ,z), где (ρ,φ) – полярные координаты проекции точки на плоскость Oxy (рис.28). **Сферическими координатами точки** называется тройка (r,φ,ψ), где $r\ge 0$ – расстояние от точки до начала координат, $0\le\varphi\le 2\pi$ – то же, что и в случае цилиндрических координат, $-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$ – угол, образованный радиус-вектором точки и плоскостью Oxy (рис.29).

Связь между сферическими и декартовыми координатами

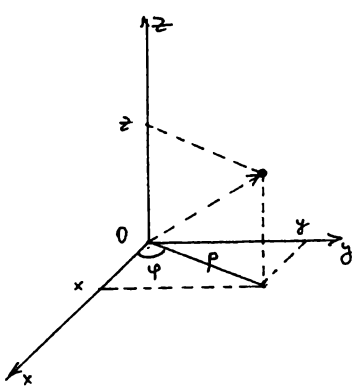


Рис. 28

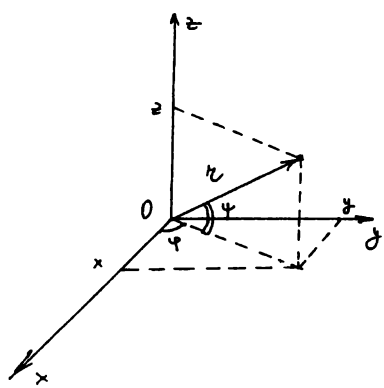


Рис. 29

выражается формулами $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi, z = r\sin\psi$.

При вычислении тройного интеграла в цилиндрических координатах пользуются формулой

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{G}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz,$$

а в сферических координатах – формулой

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{G}} f(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi)r^2\cos\psi dr d\varphi d\psi,$$

где $\widetilde{G}$ – соответствующая области G часть пространства переменных (ρ,φ,z) или (r,φ,ψ).

Аналогично двойному интегралу, возникновение множителей ρ и $r^2\cos\psi$ при переходе к цилиндрическим и сферическим координатам становится понятным, если использовать специальное разбиение области на части координатной сеткой соответствующей системы координат. Так, при малых $\Delta\rho_i, \Delta\varphi_i, \Delta z_i$ объем параллелепипеда

$$\{(\rho,\varphi,z): \rho_i \le \rho \le \rho_i + \Delta\rho_i,\ \varphi_i \le \varphi \le \varphi_i,\ z_i \le z \le z_i + \Delta z_i\}$$

цилиндрической системы координат есть $\rho_i\Delta\varphi_i\Delta\rho_i\Delta z_i$, а при малых $\Delta r_i, \Delta\varphi_i, \Delta\psi_i$ объем параллелепипеда

$$\{(r,\varphi,\psi): r_i \le r \le r_i + \Delta r_i, \varphi_i \le \varphi \le \varphi_i + \Delta\varphi_i, \psi_i \le \psi \le \psi_i + \Delta\psi_i\}$$

сферической системы координат есть $r_i^2\cos^2\psi_i\Delta r_i\Delta\varphi_i\Delta\psi_i$.

Приведем пример вычисления тройного интеграла в сферических координатах.

Пример 2. Вычислить интеграл от функции

$f(x,y,z) = \cos\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ по шару $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Решение: Имеем

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{\substack{0\le r\le 1,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\\ -\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \cos\pi r\cdot r^2\cos\psi dr d\varphi d\psi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \cdot \int_0^1 r^2 \cos\pi r dr = 2\pi \cdot \sin\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^1 r^2 d\sin\pi r =$$

$$= 4\left(r^2 \sin\pi r\Big|_0^1 - 2\int_0^1 r\sin\pi r dr \right) = \frac{8}{\pi} \int_0^1 r d\cos\pi r = \frac{8}{\pi}\left(r\cos\pi r\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos\pi r dr \right) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(-1 - \frac{\sin\pi r}{\pi}\Big|_0^1 \right) = -\frac{8}{\pi}.$$

4.4. Площадь поверхности

Рассмотрим **гладкую поверхность** $\sigma = \{z = f(x,y);\ (x,y) \in D\}$, где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в ограниченной замкнутой области D. Как известно, уравнение **касательной плоскости** в точке $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ поверхности имеет вид

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Соответственно, **нормаль** к поверхности задается уравнением

$$\frac{x - x_0}{-f_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{-f_y(x_0,y_0)} = \frac{z - f(x_0,y_0)}{1}.$$

Возьмем в каждой точке поверхности единичный вектор $\vec{n}$ нормали, образующий острый угол с осью Oz:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1).$$

Очевидно, $\vec{n} = \vec{n}(x,y)$ есть непрерывная вектор-функция на D.

Разобьем произвольным образом область D на части D_i площадью ΔS_i и выберем точки $P_i \in D_i$. В каждой точке $(P_i, f(P_i))$ поверхности

σ проведем касательную плоскость и рассмотрим часть σ_i поверхности и часть π_i касательной плоскости, проецирующиеся в область D_i. При достаточно мелком разбиении области D площадь части σ_i можно приближенно заменить площадью части π_i, которая равна

$$\frac{\Delta S_i}{\cos(\vec{n}(P_i), Oz)} = \sqrt{1+f_x^2(P_i)+f_y^2(P_i)}\cdot\Delta S_i.$$

За площадь поверхности σ принимают предел суммы $\sum_i \sqrt{1+f_x^2(P_i)+f_y^2(P_i)}\cdot\Delta S_i$ этих площадей по всем элементам разбиения, когда мелкость разбиения стремится к нулю. Этот предел существует, поскольку написанная сумма является интегральной суммой непрерывной в D функции $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$, и равен двойному интегралу $\iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$. Таким образом, площадь гладкой поверхности $\sigma = \{z = f(x,y);\ (x,y)\in D\}$ вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy.$$

Пример. Вычислить площадь поверхности

$$\sigma = \{z = \frac{1}{2}(x^2-y^2);\ x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Решение: Имеем $f_x = x, f_y = -y$, и

$$S = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le\varphi\le \pi/2}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{6}u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).$$

4.5. Определение криволинейного интеграла, его свойства

Рассмотрим **гладкую пространственную кривую** $\Gamma = \{M(s) = (x(s), y(s), z(s));\ 0 \le s \le S\}$, параметром на которой выбрана **переменная длина дуги** s. Это означает, что длина дуги кривой от ее начала $M(0)$ до точки $M(s)$ равна s. Функции $x(s), y(s), z(s)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(s), y'(s), z'(s)$ на отрезке $[0, S]$. **Единичный касательный вектор** к кривой в точке $M(s)$ имеет вид $\vec{\tau}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$.

Предположим, что на кривой Γ задана вектор-функция $\vec{a}(M(s)) = (P(M(s)), Q(M(s)), R(M(s)))$, являющаяся непрерывной функцией параметра $s \in [0, S]$. Умножив в каждой точке кривой значение вектор-функции $\vec{a}$ скалярно на единичный касательный вектор $\vec{\tau}$, будем иметь непрерывную на отрезке $[0, S]$ числовую функцию

$$\vec{a}(M(s)) \cdot \vec{\tau}(s) = P(M(s)) \cdot x'(s) + Q(M(s)) \cdot y'(s) + R(M(s)) \cdot z'(s).$$

Разобьем отрезок $[0, S]$ произвольным образом точками $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = S$. Длину отрезка $[s_{i-1}, s_i]$ обозначим Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отметим, что, по смыслу параметра s, Δs_i есть длина дуги кривой между точками $M(s_{i-1})$ и $M(s_i)$. Выбрав произвольным образом точки $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M(\xi_i)) \cdot \vec{\tau}(\xi_i) \Delta S_i .$$

Эта сумма является интегральной суммой для непрерывной на отрезке $[0, S]$ функции $\vec{a} \cdot \vec{\tau}$. Поэтому при стремлении к нулю мелкости разбиений (мелкостью разбиения называется наибольшая из длин отрезков разбиения) последовательность таких сумм имеет своим пределом определенный интеграл $\int_0^S \vec{a}(M(s))\vec{\tau}(s)ds$. Этот интеграл

называется **криволинейным интегралом от вектор-функции** $\vec{a}$ **по кривой** Γ и обозначается $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds}$ или $\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{0}^{S}\left(P(M(s))x'(s)+Q(M(s))y'(s)+R(M(s))z'(s)\right)ds.$$

Поскольку понятие криволинейного интеграла сводится к понятию определенного интеграла, для криволинейного интеграла сохраняются важнейшие свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность и др.:

1. Для любых непрерывных на Γ вектор-функций $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ и постоянных λ_1 и λ_2 имеет место равенство

$$\int\limits_{\Gamma}(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2)\,\vec{ds}=\lambda_1\int\limits_{\Gamma}\vec{a}_1\,\vec{ds}+\lambda_2\int\limits_{\Gamma}\vec{a}_2\,\vec{ds}$$

(линейность криволинейного интеграла).

2. Если гладкая кривая Γ состоит из дуг Γ_1 и Γ_2, то для любой непрерывной на Γ вектор-функции $\vec{a}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{a}\,\vec{ds}=\int\limits_{\Gamma_1}\vec{a}\,\vec{ds}+\int\limits_{\Gamma_2}\vec{a}\,\vec{ds}$$

(аддитивность криволинейного интеграла).

3. Если $C=\max\limits_{[0,S]}\left|\vec{a}(M(s))\cdot\vec{\tau}(s)\right|\le\max\limits_{[0,S]}\left|\vec{a}(M(s))\right|$, то

$$\left|\int\limits_{\Gamma}\vec{a}\,\vec{ds}\right|\le C\cdot S.$$

Помимо этих свойств, криволинейный интеграл обладает свойством менять знак при изменении ориентации кривой.

4. Если $\Gamma^*=\{M^*(s);\ 0\le s\le S\}$ – кривая с противоположной ориентацией, то

$$\int_{\Gamma^*} \vec{a}\,\vec{ds} = -\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds}.$$

Действительно, в этом случае $M^*(s) = M(S-s)$,

$\vec{\tau}^*(s) = (x^{*'}(s), y^{*'}(s), z^{*'}(s)) = -(x'(S-s), y'(S-s), z'(S-s)) =$

$= -\vec{\tau}(S-s)$, а потому

$$\int_{\Gamma^*} \vec{a}\,\vec{ds} = \int_0^S \vec{a}(M^*(s))\cdot\vec{\tau}^*(s)ds = -\int_0^S \vec{a}(M(S-s))\cdot\vec{\tau}(S-s)ds =$$

$$= -\int_0^S \vec{a}(M(s))\cdot\vec{\tau}(s)ds = -\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds}.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда гладкая кривая Γ задается при помощи произвольного параметра t: $\Gamma = \{M(t) = (x(t), y(t), z(t)); a \le t \le b\}$. Функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны вместе с производными $x'(t), y'(t), z'(t)$ на отрезке $[a,b]$, причем $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$ $(t \in [a,b])$. В таком случае переменная длина дуги s является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t. Но тогда обратная функция $t(s)$ также является строго возрастающей и непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[0,S]$ (S – длина кривой Γ), и можно перейти к такому представлению кривой, когда в качестве параметра берется переменная длина дуги s:

$\Gamma = \{M(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)));\ 0 \le s \le S\}$.

Для единичного касательного вектора будем иметь:

$$\vec{\tau}(s) = \big(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))\big)'_s = t'(s)\cdot\big(x'(t(s)), y'(t(s)), z'(t(s))\big).$$

Пусть на кривой Γ задана вектор-функция $\vec{a}(M(t))$, непрерывно зависящая от параметра $t \in [a,b]$. Тогда вектор-функция $\vec{a}(M(t(s)))$ непрерывна по $s \in [0,S]$. По формуле замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds} = \int_{0}^{S} [P(M(t(s)))x'(t(s)) + Q(M(t(s)))y'(t(s)) +$$

$$+ R(M(t(s)))z'(t(s))]t'(s)ds = \int_{a}^{b} [P(M(t))x'(t) + Q(M(t))y'(t) +$$

$$+ R(M(t))z'(t)]dt.$$

Тем самым получена формула для вычисления криволинейного интеграла в случае произвольного параметра на гладкой кривой:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{a}^{b} \left(P(M(t))x'(t) + Q(M(t))y'(t) + R(M(t))z'(t)\right)dt.$$

Вид интеграла в правой части не зависит от того, какой параметр берется на кривой. Если кривая Γ – кусочно-гладкая, то ее можно представить в виде объединения гладких частей: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ (все Γ_i – гладкие кривые, конец Γ_{i-1} совпадает с началом Γ_i $i = 2,...,n$). Криволинейный интеграл от непрерывной вектор-функции $\vec{a}$ по кусочно-гладкой кривой Γ определяется как сумма интегралов по гладким частям:

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \vec{a}\,\vec{ds}.$$

Замечание. Криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от двумерной вектор-функции $\vec{a} = (P,Q)$ вдоль плоской кривой $\Gamma = \{M(t) = (x(t), y(t)); a \le t \le b\}$ можно рассматривать как частный случай интеграла

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

считая $z(t) \equiv 0$, $R(x,y,z) \equiv 0$, $P(x,y,z) = P(x,y)$, $Q(x,y,z) = Q(x,y)$.

Механический смысл криволинейного интеграла от вектор-

функции $\bar{a}$ **по кривой** Γ: $\int_{\Gamma} \bar{a}\,d\bar{s}$ равен работе переменной силы $\bar{a}$ вдоль дуги кривой Γ.

Пример. Вычислить работу силы $\vec{a} = (yz, xz, xy)$ вдоль дуги винтовой линии Γ $x = \cos t, y = \sin t, z = t, (0 \le t \le 2\pi)$.

Имеем

$$\int_{\Gamma} \vec{a}d\vec{s} = \int_{\Gamma} yzdx + xzdy + xydz = \int_{0}^{2\pi} (-t\sin t\sin t + t\cos t\cos t + \cos t\sin t)dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} t\cos 2tdt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin 2tdt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} td(\sin 2t) - \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_{0}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sin 2t\Big|_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} \sin 2tdt \right) = 0.$$

4.6. Формула Грина

Теорема 3. Если D – замкнутая плоская область, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ; функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеет место **формула Грина**

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy,$$

где в криволинейном интеграле справа граница Γ обходится против часовой стрелки.

Формулу Грина можно использовать в обеих направлениях: с одной стороны, она позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к вычислению двойного; с другой стороны, часто оказывается проще вычислить соответствующий криволинейный интеграл. В качестве примера рассмотрим формулу для площади плоской области. Для этого в формуле Грина положим $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. Тогда будем иметь

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 2$, и

$$2\iint\limits_D dxdy = \int\limits_\Gamma xdy - ydx \text{, или}$$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma xdy - ydx.$$

Итак, для нахождения площади плоской области следует вычислить криволинейный интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma xdy - ydx$ вдоль ориентированной против часовой стрелки границы Γ.

Пример. Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Воспользовавшись параметрическим представлением эллипса $x = a\cos t, y = b\sin t, (0 \le t \le 2\pi)$, будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t)\right)dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

4.7. Определение поверхностного интеграла, его свойства

Рассмотрим гладкую поверхность $\sigma = \{z = f(x,y), (x,y) \in D\}$, где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в ограниченной замкнутой области D. Всякую непрерывную единичную нормаль на поверхности назовем **ориентацией поверхности**. Но в каждой точке поверхности σ имеются лишь две единичные нормали: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$ и $-\vec{n}$, поэтому у поверхности σ имеются только две ориентации $\vec{n}$ и $-\vec{n}$. В

том случае, когда выбирается нормаль $\vec{n}$, будем говорить о **верхней стороне поверхности** σ, если же выбирается нормаль $-\vec{n}$ – **о нижней стороне**.

Предположим, что на поверхности σ задана вектор-функция $\vec{a}(x,y,f(x,y)), \vec{a}=(P,Q,R)$, являющаяся непрерывной функцией переменных $(x,y)\in D$. Умножив в каждой точке $(x,y,f(x,y))$ поверхности вектор $\vec{a}$ скалярно на $\vec{n}$, получим непрерывную на D числовую функцию $(\vec{a}\cdot\vec{n})(x,y)$.

Разобьем произвольным образом область D на части D_i площадью ΔS_i и выберем точки $M_i\in D_i$. Площадь части поверхности σ, которая проецируется на D_i, приближенно равна

$$\Delta\widetilde{S}_i=\frac{\Delta S_i}{\cos(\vec{n}(M_i),Oz)}=\sqrt{1+f_x^2(M_i)+f_y^2(M_i)}\Delta S_i$$

(степень приближения зависит от мелкости разбиения; написанное выражение есть в точности площадь куска проведенной в точке $(M_i,f(M_i))$ касательной плоскости, который проецируется на D_i).

Умножим теперь значение функции $(\vec{a}\cdot\vec{n})(x,y)$ в точке M_i на площадь $\Delta\widetilde{S}_i$ и просуммируем по всем элементам разбиения. Используя координатную запись, будем иметь

$$\sum_i(\vec{a}\cdot\vec{n})(M_i)\Delta\widetilde{S}_i=\sum_i(-f_x(M_i)\cdot P(M_i,f(M_i))-$$

$$-f_y(M_i)\cdot Q(M_i,f(M_i))+R(M_i,f(M_i)))\Delta S_i.$$

Таким образом, $\sum_i(\vec{a}\cdot\vec{n})(M_i)\Delta\widetilde{S}_i$ есть интегральная сумма непрерывной на D функции $-f_xP-f_yQ+R$. Следовательно, существует предел таких сумм при мелкости разбиений, стремящейся к нулю. Этот предел называется **поверхностным интегралом от вектор-функции $\vec{a}$ по верхней стороне поверхности** σ и

обозначается $\iint\limits_{\sigma} \vec{a}\, d\vec{\sigma}$ или $\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. Используя вектор $(-\vec{n})$ вместо $\vec{n}$, получим определение **поверхностного интеграла по нижней стороне поверхности** σ. Итак,

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D} (-f_x(x,y)P(x,y,f(x,y)) - f_y(x,y)Q(x,y,f(x,y)) +$$

$$+ R(x,y,f(x,y)))dxdy.$$

Поверхностный интеграл, конечно, обладает свойствами линейности, аддитивности и, кроме того, меняет знак при изменении ориентации поверхности.

Мы рассмотрели случай, когда поверхность однозначно проецируется на область D координатной плоскости Oxy. В случае, если поверхность однозначно проецируется на область D, например, координатной плоскости Oxz, и является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = g(x,z), (x,z) \in D$, формула для вычисления поверхностного интеграла примет следующий вид:

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D} (-g_x(x,z)P(x,g(x,z),z) + Q(x,g(x,z),z) -$$

$$- g_z(x,z)R(x,g(x,z),z))dxdz$$

(знак "+" выбирается в случае, когда нормаль составляет острый угол с положительным направлением оси Oy; в противном случае берется знак "–").

Произвольную гладкую поверхность σ всегда можно разбить на конечное число частей $\sigma_i (i = 1,...,n)$, допускающих явное задание. По определению получаем

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{a}\,\overrightarrow{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\sigma_i} \vec{a}\,\overrightarrow{d\sigma}.$$

Ориентация каждой части σ_i должна, конечно, соответствовать исходной ориентации на σ.

Аналогично поступают и в случае кусочно-гладкой поверхности σ – результата "склейки вдоль краев" конечного числа гладких поверхностей $\sigma_j (j = 1,...,m)$. Интеграл по такой поверхности определяется как сумма интегралов по гладким частям (при этом все σ_j должны быть согласованно ориентированы).

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$ по верхней стороне параболоида $\sigma = \{z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 \le 1\}$.

Решение: Имеем $f_x = 2x,\ f_y = 2y,\ P = x,\ Q = y,\ R = z$, и

$$\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-2x\cdot x - 2y\cdot y + x^2 + y^2)\,dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2 + y^2)\,dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

4.8. Формула Стокса

Всюду далее числовые функции, заданные в некоторой части пространства, будем называть **скалярными полями**, а векторные функции – **векторными полями**. Заданное в области G поле (скалярное или векторное) называется **непрерывно дифференцируемым**, если все его частные производные первого порядка непрерывны на G. Всякому непрерывно дифференцируемому на G скалярному полю $u(x, y, z)$ соответствует непрерывное на G **векторное поле его градиентов**

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Всякому же непрерывно дифференцируемому на G векторному полю $\vec{a}(x,y,z)$ можно поставить в соответствие следующие непрерывные на G скалярное поле $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ и векторное поле

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(P,Q,R есть координаты вектора $\vec{a}$).

Скалярное поле $div\vec{a}$ называется **дивергенцией векторного поля** $\vec{a}$, а векторное поле $rot\vec{a}$ называется **вихрем (ротором) векторного поля** $\vec{a}$.

Если Γ – кусочно-гладкий замкнутый контур и векторное поле $\vec{a}$ задано на Γ, то криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds}$ называется **циркуляцией векторного поля** $\vec{a}$ по этому контуру. Если σ – кусочно-гладкая поверхность, то для векторного поля $\vec{a}$, заданного на поверхности σ, поверхностный интеграл $\iint_{\sigma} \vec{a}\,\vec{d\sigma}$ называется также **потоком векторного поля** $\vec{a}$ через поверхность σ.

Пусть D – замкнутая плоская область, границей которой служит кусочно-гладкий контур Γ_0. Рассмотрим гладкую поверхность $\sigma = \{z = f(x,y); (x,y) \in D\}$. Обозначим Γ образ контура Γ_0 при отображении f. Контур Γ есть край поверхности σ, тогда Γ_0 – его проекция на плоскость Oxy. На контуре Γ_0 выберем ориентацию, при которой он проходится против часовой стрелки. Ориентация Γ_0 порождает ориентацию на Γ. На поверхности σ выберем ориентацию, при которой нормаль во всех точках поверхности образует острый угол с осью Oz:

$$\vec{n}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1).$$

Такие ориентации на поверхности σ и ее крае Γ называются согласованными (рис.30).

Теорема 4. *Если векторное поле* $\vec{a}=(P,Q,R)$ *непрерывно дифференцируемо в некоторой области пространства, содержащей поверхность* σ, *то имеет место равенство*

$$\iint_{\sigma} rot\vec{a}\,\vec{d\sigma}=\int_{\Gamma}\vec{a}\,\vec{ds},$$

называемое **формулой Стокса**.

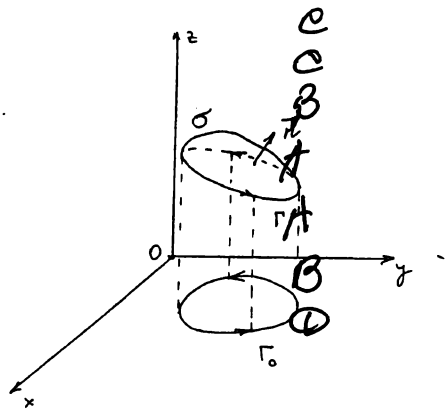


Рис. 30

Эта формула означает, что поток вихря векторного поля через поверхность равен циркуляции векторного поля по краю поверхности, ориентированному согласованно с нормалью к поверхности.

В координатной записи формула Стокса имеет вид

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz.$$

При вычислениях формулу Стокса обычно используют справа налево: по заданному векторному полю легко найти вихрь, но не наоборот. Кроме того, при использовании формулы Стокса для нахождения циркуляции вдоль заданного контура Γ, в качестве σ можно брать любую гладкую поверхность, стягивающую Γ, на которой поле $\vec{a}$ непрерывно дифференцируемо. Например, если контур Γ плоский, то в качестве σ можно взять плоскую поверхность, ограниченную этим контуром.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,

где Γ – эллипс в сечении цилиндра $x^2+y^2=a^2$ плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ (пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a,0,0)$) (рис.31).

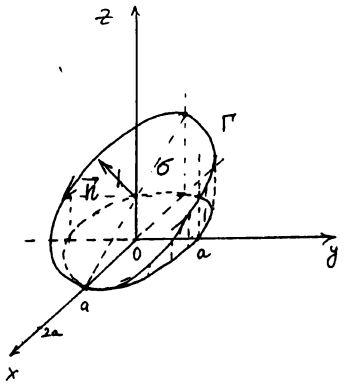


Рис. 31

Решение: Имеем

$$\vec{a}=(y-z,z-x,x-y).$$

Тогда $rot\vec{a}=(-2,-2,-2)$. В качестве поверхности σ, натянутой на контур Γ, берем $\sigma=\{z=h\left(1-\frac{x}{a}\right); x^2+y^2\le a^2\}$. По формуле Стокса исходный интеграл равен интегралу

$$-2\iint\limits_{\sigma} dydz+dzdx+dxdy=-2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{h}{a}+1\right)dxdy=-2\left(\frac{h}{a}+1\right)\pi a^2.$$

4.9. Формула Остроградского–Гаусса

Теорема 5. *Пусть G – замкнутая область в пространстве, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью σ, а векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$ непрерывно дифференцируемо на G. Тогда имеет место равенство*

$$\iiint\limits_{G} div\vec{a}\,dxdydz=\iint\limits_{\sigma}\vec{a}\,d\vec{\sigma},$$

где интеграл в правой части берется по внешней стороне (нормаль направлена во внешность области) поверхности σ, ограничивающей область G. Это равенство называется **формулой Остроградского-Гаусса** и означает, что интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую область, в направлении внешней нормали. В координатной форме формула Остроградского-Гаусса выглядит следующим образом:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_\sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

Формулу Остроградского-Гаусса чаще используют при вычислении поверхностных интегралов, сводя их к тройным.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_\sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где σ – внешняя сторона границы куба $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a$.

Решение: Имеем $\vec{a}=(x^2,y^2,z^2)$. Тогда $div\vec{a}=2(x+y+z)$. В силу формулы Остроградского-Гаусса исходный интеграл равен интегралу

$$2\iiint\limits_{\substack{0\le x\le a,\\ 0\le y\le a,\\ 0\le z\le a}}(x+y+z)dz=2\int_0^a dy\int_0^a dz\int_0^a xdx+2\int_0^a dx\int_0^a dz\int_0^a ydy+2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=$$

$$=3\cdot 2a^2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a=3a^4.$$

Формулу Остроградского-Гаусса можно использовать и слева направо. Так, положив в ней $P=x, Q=y, R=z$, получим выражение для объема области в виде поверхностного интеграла:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_\sigma xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

4.10. Соленоидальные и потенциальные векторные поля

Важными классами векторных полей являются соленоидальные поля и потенциальные поля. Можно показать, что при достаточно общих предположениях любое векторное поле раскладывается в сумму потенциального и соленоидального векторных полей.

Непрерывное в области G векторное поле $\vec{a}$ называется **соленоидальным** в этой области, если для любой ограниченной области $G'\subset G$ с кусочно-гладкой границей $\sigma'\subset G$ его поток через эту границу равен нулю.

Теорема 6. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое в некоторой области векторное поле* $\vec{a}$ *было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области его дивергенция равнялась нулю:* $div\vec{a} = 0$.

Примером соленоидального в некоторой области G поля является поле вихря $rot\vec{a}$, заданного на G, дважды непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ (последнее означает, что вектор-функция $\vec{a}$ имеет в G непрерывные частные производные второго порядка). В силу теоремы 6 достаточно проверить, что $divrot\vec{a} = 0$ в G. Действительно, если $\vec{a} = (P, Q, R)$, то

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \text{ и}$$

$$divrot\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

(из непрерывности смешанных производных следует, что они не зависят от порядка дифференцирования).

Если в области G задано векторное поле $\vec{a}$ и существует скалярное в G поле u, для которого векторное поле $\vec{a}$ является полем градиентов: $\vec{a} = \nabla u$, то функция u называется **потенциалом** векторного поля $\vec{a}$. Векторное поле, для которого существует потенциал, называется **потенциальным полем**. Таким образом, в случае потенциального векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$, его компоненты являются производными некоторой функции u:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

а дифференциальная форма $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом:

$$Pdx + Qdy + Rdz = du.$$

Очевидно, потенциал определен неоднозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

Предположим теперь, что заданное в области G потенциальное векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ непрерывно в G, u – его потенциал, и $\overset{\frown}{AB}$ – гладкая кривая, лежащая в области G, началом которой является точка A, а концом – точка B:

$$\overset{\frown}{AB} = \{x(t), y(t), z(t); a \le t \le b\}.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,\vec{ds} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

Подставляя $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}, R = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ и применяя формулу дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,\vec{ds} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} y'(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} z'(t) \right) dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t))dt =$$

$$= u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)) = u(B) - u(A).$$

Таким образом, для потенциального поля $\vec{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,\vec{ds}$ не зависит от выбора гладкой кривой, соединяющей в области G точки A и B, и равен разности потенциалов в конечной и начальной точках. Это утверждение очевидным образом распространяется и на кусочно-гладкие кривые. В частности, для лежащего в G замкнутого кусочно-гладкого контура Γ криволинейный

интеграл $\int_{\Gamma} \vec{a}\,\vec{ds}$ равен нулю (точки A и B совпадают). Несложно показать и обратное: из равенства нулю циркуляции по любому замкнутому контуру следует, что поле потенциально.

Таким образом, имеет место следующий критерий потенциальности векторного поля:

Теорема 7. *Для того, чтобы непрерывное векторное поле было потенциальным в области, необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равнялась нулю.*

Необходимое и достаточное условие в теореме, однако, трудно проверяемо. Для широкого класса областей существует более удобный критерий потенциальности.

Область называется **односвязной**, если любой лежащий в G кусочно-гладкий замкнутый контур можно непрерывной деформацией в G стянуть в точку. Примером односвязной области является всякая выпуклая область, примером неодносвязной области служит тор.

Теорема 8. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле было потенциальным в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы его вихрь в этой области равнялся нулю.*

Заметим, что условие $rot\vec{a} = 0$ в G является необходимым в случае произвольной области G, без предположения односвязности. Действительно,

$$rot\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) = 0.$$

Таким образом, потенциальные поля являются безвихревыми. В случае же односвязной области верно и обратное: безвихревое поле будет потенциальным.

Формула

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,\vec{ds} = u(B) - u(A),$$

справедливая для потенциального поля $\vec{a}$, оказывается полезной как для вычисления криволинейных интегралов, если известен потенциал, так и для нахождения потенциала. Зафиксировав любую точку $A = (x_0, y_0, z_0) \in G$, можно считать потенциал в этой точке равным нулю:

$u(x_0, y_0, z_0) = 0$. Тогда для точки $B = (x, y, z)$ будем иметь

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

причем, согласно сделанному замечанию, путь интегрирования можно выбирать произвольным.

Пример. Проверим, является ли поле $\vec{a} = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2})$ потенциальным в четверть-пространстве $x > 0, z > 0$, и найдем его потенциал.

Согласно теореме 8, достаточно проверить условие $rot\vec{a} = 0$. Имеем

$$P = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z},\ Q = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2},\ R = -\frac{xy}{z^2},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{-y}{z^2};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}.$$

Таким образом, поле $\vec{a}$ потенциально. Для нахождения потенциала рассмотрим интеграл

$$\int_{(0,1,1)}^{(x, y, z)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$$

вдоль ломаной AC_1C_2B, соединяющей точки $A(0,1,1)$ и $B(x, y, z)$ (рис.32; звенья ломаной параллельны координатным осям). Очевидно,

$$\int_{(0,1,1)}^{(x, y, z)} = \int_{A}^{C_1} + \int_{C_1}^{C_2} + \int_{C_2}^{B}.$$

При этом

$$\int_{A}^{C_1} = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) dt = x,$$

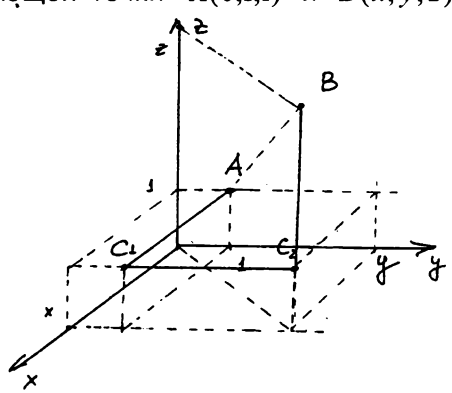


Рис. 32

$$\int_{C_1}^{C_2} = \int_1^y \left(\frac{x}{1} + \frac{x}{t^2} \right) dt = x \left(\int_1^y dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} \right) = x \left(y - 1 - \frac{1}{t} \Big|_1^y \right) =$$

$$= x \left(y - 1 - \frac{1}{y} + 1 \right) = x \left(y - \frac{1}{y} \right),$$

$$\int_{C_2}^{B} = \int_1^z \left(-\frac{xy}{t^2} \right) dt = \frac{xy}{t} \Big|_1^z = \frac{xy}{z} - xy.$$

Итак, $u(x, y, z) = x + x \left(y - \frac{1}{y} \right) + \frac{xy}{z} - xy = x \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right)$.

4.11. Геометрические и физические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов

С применением кратных интегралов при нахождении площадей и объемов мы уже сталкивались ранее (см. п.п. 1,2,4). Перечислим следующие механические и физические приложения кратных интегралов.

1) Если $\rho = \rho(x, y)$ – плотность плоской пластинки D, то ее масса

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$$

а координаты ее центра тяжести

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy, y_0 = \frac{1}{M} \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy.$$

2) Моменты инерции пластинки D, лежащей в плоскости xy, относительно координатных осей x и y выражаются соответственно формулами

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

3) Если $\rho = \rho(x, y, z)$ – плотность тела G в точке (x, y, z), то масса тела равна

$$M = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)dxdydz,$$

а координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_G x\rho dxdydz,\ y_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_G y\rho dxdydz,\ z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_G z\rho dxdydz.$$

4) Моменты инерции тела G относительно координатных плоскостей xy, yz, zx выражаются соответственно формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\rho dxdydz,\ I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\rho dxdydz,\ I_{zx} = \iiint\limits_G y^2\rho dxdydz.$$

5) Момент инерции тела G относительно некоторой оси l вычисляется по формуле

$$I_l = \iiint\limits_G r^2\rho dxdydz,$$

где $r = r(x,y,z)$ – расстояние от точки $(x,y,z) \in G$ до оси l.

В частности, для координатных осей имеем

$$I_x = I_{xy} + I_{xz},\ I_y = I_{xy} + I_{yz},\ I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

6) Момент инерции тела G относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}.$$

7) Потенциал поля тяготения, создаваемого телом G с плотностью $\rho(x,y,z)$, в точке (ξ,η,ς) равен

$$u(\xi,\eta,\varsigma) = \iiint\limits_G \frac{\rho(x,y,z)}{r}dxdydz,$$

где $r = r(x,y,z) = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\varsigma-z)^2}$ – расстояние от переменной точки $(x,y,z) \in G$ до фиксированной точки (ξ,η,ς).

8) Если плотность распределения заряда в области G равна $q(x,y,z)$, то заряд, сосредоточенный в G, равен

$$Q = \iiint\limits_G q(x,y,z)dxdydz,$$

а кулоновский потенциал, создаваемый этим зарядом в точке (ξ,η,ς), равен

$u(\xi,\eta,\varsigma) = \iiint\limits_G \frac{q(x,y,z)}{r} dxdydz$, где r – расстояние от точки (x,y,z) до точки (ξ,η,ς).

Перечислим теперь некоторые физические приложения криволинейных и поверхностных интегралов.

9) Работа переменной силы $\vec{F}$, точка приложения которой описывает кривую Γ, равна

$$A = \int\limits_\Gamma \vec{F}\,\vec{ds}.$$

Если силовое поле $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ потенциально, и $u = u(x,y,z)$ – его потенциал, то работа, совершаемая полем при перемещении из точки P_1 в точку P_2, равна

$$A = u(P_2) - u(P_1).$$

10) Если $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ есть поле скоростей жидкости, то количество жидкости, протекающее через поверхность σ, выражается формулой

$$Q = \iint\limits_\sigma \vec{v}\ \overrightarrow{d\sigma}.$$

Соленоидальность поля скоростей в области означает отсутствие в этой области источников жидкости (расход жидкости через любую замкнутую поверхность, лежащую в области, равен нулю).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Выполните самостоятельно следующие задачи:

Вариант 1

1. Найти интеграл $\int e^{-x^2} x dx$ методом замены переменной.

2. Найти интеграл $\int x^2 \ln x dx$ интегрированием по частям.

3. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 5x + 6}$.

4. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

5. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x + x^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ или установить его расходимость.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4x - x^2$.

10. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le \pi$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y) dx dy$ по области D, где D – треугольник с вершинами O(0,0), A(2,1), B(–2,1).

12. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = x + y + 1$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

13. Найти работу векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

Вариант 2

1. Найти интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,x\,dx$ методом замены переменной.

2. Найти интеграл $\int x\sin 2x\,dx$ интегрированием по частям.

3. Найти интеграл $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$.

4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$.

5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

9. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

10. Вычислить длину дуги одного витка винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – треугольник с вершинами O(0,0), A(1,0), B(1,1).

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

13. Найти работу векторного поля $\bar{a} = \frac{1}{y}\bar{i} + \frac{1}{z}\bar{j} + \frac{1}{x}\bar{k}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки M(1,1,1) и N(2,4,8).

Вариант 3

1. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ с помощью замены переменной.

2. Найти интеграл $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ интегрированием по частям.

3. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$.

4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+4}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

9. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y=3-x$ и $xy=2$.

10. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ между точками с абсциссами $x=-1$ и $x=1$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – трапеция с вершинами O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1).

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$ и $x^2+y^2=R^2$.

13. Найти работу векторного поля $\bar{a}=e^{y-z}\bar{i}+e^{z-x}\bar{j}+e^{x-y}\bar{k}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки O(0,0,0) и M(1,3,5).

Вариант 4

1. Найти интеграл $\int \sqrt{1+\ln x}\frac{dx}{x}$ методом замены переменной.

2. Найти интеграл $\int (2x+1)e^{-x}dx$ интегрированием по частям.

3. Найти интеграл $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+2x+2)}$.

4. Найти интеграл $\int \sin 3x \cos x dx$.

5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

9. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x$.

10. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{t^3}{3}, y = 4 - \frac{t^2}{2}$ между точками пересечения с осями координат.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – круг $x^2 + y^2 \le 1$.

12. Найти площадь части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезаемой эллиптическим цилиндром $4(x-1)^2 + y^2 = 1$.

13. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + c\bar{k}$ (с - константа) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 10$ при движении точки по контуру по ходу часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

Вариант 5

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ методом замены переменной .

2. Найти интеграл $\int \arcsin x dx$ интегрированием по частям.

3. Найти интеграл $\int \frac{3xdx}{(x+1)(x-2)}$.

4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

5. Найти интеграл $\int x^3\sqrt{x+1}dx$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^8 (\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x})dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}(x+1)dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$ или установить его расходимость.

9. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2-x^2}$ и $y=x^2$.

10. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, отсеченной прямыми $x=a$ и $x=-a$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – круг $x^2+y^2 \le y$.

12. Найти площадь части поверхности $z=xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

13. Найти работу векторного поля $\bar{a}=z\bar{i}+2\bar{j}+x\bar{k}$ вдоль

кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки M(3,4,0), N(0,0,5).

Вариант 6

1. Методом замены переменной найти интеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

2. Интегрированием по частям найти интеграл $\int \ln(x^2+1)dx$.

3. Найти интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^2+2x+1}$.

4. Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

5.Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{dx}{x^2}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} (1+\cos^2 x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{x}} dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ или установить его расходимость.

9. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$.

10. Вычислить длину дуги AB кривой $y = \ln x$ с концами в точках A(1,0) и B(e,1).

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – параболический сегмент, ограниченный параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$.

12. Найти площадь части поверхности $z=\sqrt{2xy}$, вырезаемой плоскостями $x=1, x=2, y=1, y=2$.

13. Найти работу векторного поля $\bar{a}=(y^2-z^2)\bar{i}+2yz\bar{j}-x^2\bar{k}$ вдоль кривой $x=t, y=t^2, z=t^3, 0\le t\le 1$.

Вариант 7

1. Методом замены переменной найти интеграл $\int e^{-\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. Интегрированием по частям найти интеграл $\int x\cos 5x dx$.

3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3+4x}$.

4. Найти интеграл $\int (4+\cos 2x)^2 dx$.

5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+1}dx$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x}-1)^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$ или установить его расходимость.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 + \frac{3}{x-4}$ и $xy = 3$.

10. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 4x$, отсеченной прямой $x = 1$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – меньший из круговых сегментов, ограниченных окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ и прямой $x + y = 2$.

12. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$.

13. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает положительную четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в направлении, противоположном ходу часовой стрелки.

Вариант 8

1. Методом замены переменной найти интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^4}}$.

2. Интегрированием по частям найти интеграл $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

3. Найти интеграл $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)} dx$.

4. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ или установить его расходимость.

9. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

10. Вычислить длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, где D – конечная часть правой полуплоскости $\{x > 0\}$, ограниченная кривыми $x^2 + y^2 = 1$ и $x = y^2$.

12. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $x + y = 2$.

13. Вычислить работу векторного поля $\bar{a} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j}$ вдоль дуги эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант 9

1. Методом замены переменной найти интеграл $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2. Интегрированием по частям найти интеграл $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$.

3. Найти интеграл $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$.

4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+4}dx$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$ и $x+y+1=0$.

10. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}, -\frac{1}{4}R \le x \le \frac{R}{4}$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $y=\frac{x^2}{2}, x^2+y^2=2y$, прямой $y=2$ и расположенной в правой полуплоскости $x>0$.

12. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

13. Вычислить работу векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}-y\bar{j}+5\bar{k}$ вдоль отрезка AB, соединяющего точки $A(0,2,0)$ и $B(2,0,2)$.

Вариант 10

1. Методом замены переменной найти интеграл $\int\frac{xdx}{1+x^2}$.

2. Интегрированием по частям найти интеграл $\int x(\ln x)^2 dx$.

3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

4. Найти интеграл $\int\frac{\sin x}{\cos x+2\sin x}dx$.

5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^{2a}\sqrt{x}(a+x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $x - y + 2 = 0$.

10. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги полукубической параболы $x = \frac{t^3}{3}$, $y = \frac{t^2}{2}$, $0 \le t \le \sqrt[3]{3}$.

11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ по области D, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ и расположенной в правой полуплоскости $x > 0$.

12. Найти массу пластинки, имеющей форму полукруга $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0\}$, если плотность пластинки есть функция $\frac{\sqrt{a}\rho_0}{\sqrt{x+a}}$.

13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j}$ вдоль контура треугольника ABC, где A(1,0), B(0,1), C(-1,0).

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1

Задание

Методом замены переменной найти интегралы

а) $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$ и б) $\int \frac{dx}{(1-2x)^3}$

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №1.

Случай а)

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Подобрать замену переменной	$x = t^2$
2	Выразить подынтегральную функцию через новую переменную	$\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} = \frac{1}{t}\cos t$
3	Выразить dx через t и dt	$dx = 2tdt$
4	Записать интеграл по формуле замены переменной	$\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{t}\cos t \cdot 2tdt$
5	Применить основные свойства неопределенного интеграла и воспользоваться таблицей основных интегралов	Используем свойство линейности и табличный интеграл (VI): $2\int \cos t dt = 2\sin t + C$
6	Вернуться от переменной t к исходной переменной x	Подставим в найденное выражение $t = \sqrt{x}$: $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sin\sqrt{x} + C$

В итоге, на основании проделанного анализа выполнения последовательности алгоритмов, решение можно записать в виде:

$$\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \cos t \cdot \frac{1}{t} \cdot 2tdt = 2\int \cos t dt = 2\sin t + C =$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + C$$

Случай б) $\int \frac{dx}{(1-2x)^3}$

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Подобрать замену переменной	$1-2x=t$
2	Выразить подынтегральную функцию через новую переменную	$\frac{1}{(1-2x)^3} = \frac{1}{t^3}$
3	Выразить dx через t и dt	$-2dx = dt$, откуда $dx = -\frac{1}{2}dt$
4	Записать интеграл по формуле замены переменной	$\int \frac{dx}{(1-2x)^3} = \int \frac{1}{t^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$
5	Применить основные свойства неопределенного интеграла и воспользоваться таблицей основных интегралов	Используем свойство линейности и табличный интеграл (II): $\int \frac{1}{t^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int t^{-3} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C =$ $= \frac{1}{4t^2} + C$
6	Вернуться от переменной t к исходной переменной x	Подставим в найденное выражение $t = 1-2x$: $\int \frac{dx}{(1-2x)^3} = \frac{1}{4(1-2x)^2} + C$

В результате проделанного анализа, решение можно записать в виде:

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^3} = \begin{bmatrix} 1-2x=t \\ -2dx=dt \\ dx=-\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t^3} = -\frac{1}{2}\int t^{-3}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C =$$

$$= \frac{1}{4t^2}+C = \frac{1}{4(1-2x)^2}+C$$

Найдите самостоятельно методом замены переменной следующие интегралы:

1. $\int \sin(2x+1)dx$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $\int 2^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$

4. $\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

Задание

Интегрированием по частям найти интегралы

а) $\int (x+1)\sin x dx$, б) $\int \operatorname{arctg} x dx$

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №2.

Случай а) $\int (x+1)\sin x dx$

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u = x+1, dv = \sin x dx$. Тогда $\int (x+1)\sin x dx = \int u dv$

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
2	Найти du и v	$du = d(x+1) = dx$ $v = \int \sin x dx = -\cos x$
3	Применить формулу интегрирования по частям $\int udv =$ $= uv - \int vdu$	$\int (x+1)\sin x dx = (x+1)(-\cos x) - \int (-\cos x)dx$
4	Найти интеграл $\int vdu$	$\int (-\cos x)dx = -\sin x + C$
5	Подставить результат в найденное в алгоритме (3) выражение	$\int (x+1)\sin x dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C_1$, $C_1 = -C$

Решение теперь можно записать в виде:

$$\int (x+1)\sin x dx = \begin{bmatrix} x+1=u; du=dx \\ \sin x dx = dv; v = -\cos x \end{bmatrix} = \int udv = uv - \int vdu =$$

$$= (x+1)(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C$$

Случай б) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx$ Тогда $\int \operatorname{arctg} x dx = \int udv$
2	Найти du и v	$du = \frac{1}{1+x^2}dx, v = \int dx = x$

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
3	Применить формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$	$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2}$
4	Найти интеграл $\int vdu$	$\int \frac{xdx}{1+x^2}\Big\|_{1+x^2=t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln\|t\| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$
5	Подставить результат в найденное в алгоритме (3) выражение	$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, $C = -C_1$

Решение можно записать в виде:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u; du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dx = dv; v = x \end{array}\right] = \int udv = uv - \int vdu =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Найдите самостоятельно интегрированием по частям следующие интегралы:

1. $\int (2-x)e^{-x}dx$

2. $\int (2x+1)\cos 3x dx$

3. $\int \arccos 2x dx$

4. $\int \ln(1+x) dx$

5. $\int x^2 e^{\frac{1}{2}x} dx$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3

Задание

Вычислить определенный интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №3.

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Найти одну из первообразных подынтегральной функции	Первообразной функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ является функция $F(x)=\operatorname{arctg}x$
2	Вычислить значения первообразной $F(x)$ в точках $x=1$ и $x=\sqrt{3}$	$F(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ $F(\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
3	Вычислить значение определенного интеграла по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=F(\sqrt{3})-F(1)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

Иначе:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

Вычислите самостоятельно по формуле Ньютона-Лейбница следующие определенные интегралы:

1. $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$

4. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\int_1^3 2^x dx$

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4

Задание

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ методом замены переменной.

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №4.

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Выбрать замену переменной	$\cos x = t$
2	Перейти в подынтегральном выражении от переменной x к новой переменной t	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ $dt = -\sin x dx$, откуда $\sin x dx = -dt$ $\sin^3 x dx = (1 - t^2)(-dt)$
3	Найти пределы интегрирования по переменной t	При $x = 0 \quad t = \cos 0 = 1$ При $x = \frac{\pi}{2} \quad t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
4	Записать данный интеграл по формуле замены переменной в определенном интеграле	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_1^0 (1 - t^2)(-dt)$
5	Вычислить полученный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница	$\int_1^0 (1 - t^2)(-dt) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = (t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^1 =$ $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Решение можно теперь записать так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t; dt = -\sin x dx; \sin x dx = -dt \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \text{При } x = 0, t = 1. \text{ При } x = \frac{\pi}{2}, t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^0 (1-t^2)(-dt) = \int_0^1 (1-t^2)dt = (t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Решите самостоятельно следующие примеры на вычисление определенного интеграла методом замены переменной:

1. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

2. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$

4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

5. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5

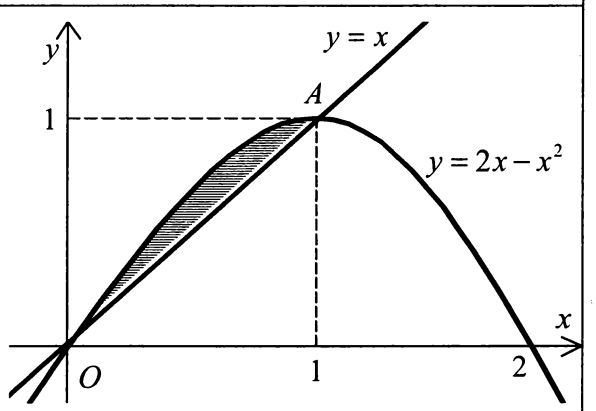
Задание

Вычислить а) площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = x$;

б) объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №5.

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Построить заданные линии и ограниченную ими фигуру	

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
2	Определить, является ли данная фигура правильной областью относительно оси Oy (или оси Ox)	Находим точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ с прямой $y = x$, решая систему: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$ Получаем две точки O(0,0) и A(1,1). Область является правильной относительно оси Oy: $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; x \le y \le 2x - x^2\}$
3	*а) Вычисление площади фигуры.*	
	Вычислить площадь области D по формуле $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$	$S = \int_0^1 [2x - x^2 - x]dx = \int_0^1 (x - x^2)dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
	б) Вычисление объема тела вращения.	
	Вычислить объем тела вращения по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx - \pi \int_a^b g^2(x)dx$	$V = \pi \int_0^1 (2x - x^2)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx =$ $= \pi \int_0^1 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$ $= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right]\Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} =$ $= \pi \left[\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} \right] - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{5}$

Решите самостоятельно следующие задачи на вычисление площади плоской фигуры и объема тела вращения с помощью определенного интеграла:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$, и объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 1 + \sqrt{x}$ и $x = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=1-\sqrt{x}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2$ и $x=3-2y^2$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin 2x$ и $y=\frac{4}{\pi}x$.

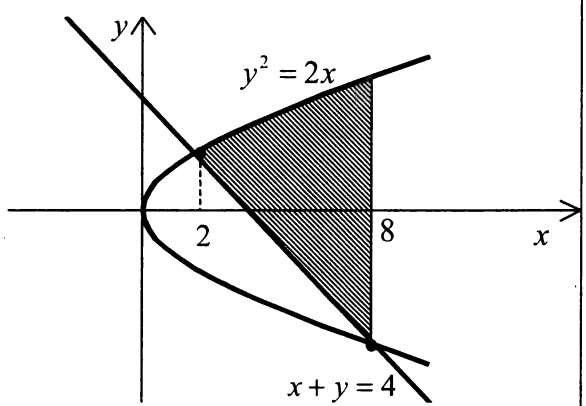
6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 6

Задание

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где D – область, ограниченная кривыми $y^2 = 2x$, $x+y=4$ и $x=8$.

Решение

Выполните последовательность алгоритмов, указанную в перечне умений для умения №6.

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
1	Нарисовать область интегрирования	Находим точки пересечения параболы и прямых: $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow x=2, x=8.$ Область D имеет вид: 
2	Представить двойной интеграл в виде повторного, определив порядок интегрирования и расставив пределы интегрирования	$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_2^8 dx \int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)dy$

№ п/п	Алгоритм	Его выполнение
3	Вычислить повторный интеграл	$\int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)dy = \int_2^8 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Big\|_{4-x}^{\sqrt{2x}} dx =$ $= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{3/2} + x - 8 \right) dx =$ $= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{5/2} + \frac{x^2}{2} - 8x \right)\Big\|_2^8 = 165{,}2$

Решите самостоятельно следующие задачи на вычисление двойного интеграла:

1. $\iint\limits_D xydxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le R^2$.

2. $\iint\limits_D x^2 dxdy$, где D – область, ограниченная прямыми $y = x, y = -x$ и $x = 2$.

3. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=2-x^2$ и $y=-x$.

4. $\iint\limits_D xdxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y^2=x+4$ и $y=x-2$.

5. $\iint\limits_D ydxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x+1$ и $x=1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЮНИТА 2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Редактор Л.С. Лебедева
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998 Сдано в печать 19.11.2001 г.
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 14000. Заказ 4045.

Современный Гуманитарный Университет

Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК